LA MÉTHODE
DANS LA PHILOSOPHIE
DES
MATHÉMATIQUES

LA MÉTHODE DANS LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

PAR

MAXIMILIEN WINTER

PARIS
LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN
MAISONS FÉLIX ALCAN ET GUILLAUMIN RÉUNIES
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1911

A MA FEMME

AVANT-PROPOS

Les trois chapitres qui composent ce livre ont paru sous forme d'articles dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* ; le premier de ces articles a été assez profondément remanié.

Un problème général domine ces études ; on peut le formuler de la manière suivante : quelle est la méthode qui, à l'heure actuelle, présente des garanties scientifiques suffisantes pour aborder l'examen critique des principes fondamentaux de la science mathématique ?

Les méthodes *métaphysiques*, quoique toujours en usage, nous paraissent, pour des raisons que nous développons dans notre *premier chapitre*, devoir être écartées. On a cru, se plaçant à un autre point de vue, pouvoir déterminer le « canon » des lois de la pensée mathématique au moyen de la *logis-*

tique. Des jugements sommaires et généralement insuffisamment motivés ont condamné ces prétentions. Nous avons essayé, tout en reconnaissant ce qu'il y avait d'excessif dans la thèse de la logistique intégrale, de délimiter le domaine restreint mais réel de la science fondée par Boole et Schröder ; tel est l'objet de notre *deuxième chapitre*. Enfin, dans le *troisième chapitre*, nous essayons d'appliquer à deux théories particulières la méthode *historico-critique*, seule méthode qui nous paraisse aujourd'hui susceptible de donner des résultats intéressants, et que E. Mach a employée d'une manière si brillante dans ses travaux sur les principes de la mécanique. Les courtes « applications » que nous donnons de la méthode historico-critique ne sont relatives qu'à des sujets délimités ; elles ne constituent que des « essais ». Nous avons choisi comme exemples deux théories qui nous ont paru, en général, ignorées complètement de la plupart des philosophes, et qui ont cependant un caractère fondamental : la théorie des nombres et l'algèbre supérieure.

Nous avons donc cherché à retracer sommairement l'évolution des principales théories arithmétiques depuis Gauss, dont le génie a donné l'impulsion décisive qui a déterminé le développement moderne de la théorie des nombres.

Nous exposons ensuite brièvement, à partir des travaux de Tschirnhaus et de Lagrange, la genèse de la théorie de la résolution des équations algébriques. Assurément cette théorie n'enveloppe pas toute l'algèbre, mais au point de vue philosophique et historique, elle constitue la doctrine élémentaire dont la plupart des autres théories algébriques sont issues. Notamment, c'est à l'occasion du problème de la résolution des équations algébriques que la théorie des groupes, dont le caractère fondamental apparaît chaque jour davantage, s'est originairement développée.

LA MÉTHODE
DANS LA
PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER
LA MÉTHODE MÉTAPHYSIQUE

I

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Un grand nombre de mathématiciens, analystes et géomètres, ont, dans le courant du XIX^e siècle, abordé l'étude des principes, — idées primitives, axiomes — qui forment la base de la science. Il semble par là qu'ils aient empiété sur un terrain qui constitue le domaine propre de la philosophie, puisque l'on affirme généralement qu'aux savants sont réservés les problèmes spéciaux qui ne peuvent se résoudre que par les méthodes techniques, aux métaphysiciens l'étude des principes fondamentaux de la science. Il s'agit donc de savoir si la critique des principes, élaborée par des savants en dehors de tout système philosophique, résout tous les problèmes que l'on peut se poser légitimement concernant les notions élémentaires, ou bien si, au contraire, cette critique reste, par sa nature même, liée à cer-

taines questions de métaphysique, et soulève nécessairement des discussions scolastiques sur l'idéalisme et l'empirisme, l'intuition et la logique, etc.

Mais parmi les savants qui ont entrepris des recherches sur les principes, les uns introduisent dans des travaux de pure méthodologie scientifique ou d'histoire des sciences des thèses philosophiques, les autres écartent résolument tout ce qui peut ressembler à une discussion sur l'origine ou la nature métaphysique des notions élémentaires. Les travaux de M. Duhem sont conçus dans la première manière; les *Principes de géométrie* de M. D. Hilbert, ou l'*arithmétique* de M. Peano, constituent des exemples de la seconde méthode.

« La géométrie, de même que l'arithmétique, écrit Hilbert [1], n'exige pour sa construction logique qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples. Ces principes fondamentaux sont dits les axiomes de la géométrie... La recherche qui suit est un nouvel essai dans le but d'établir la Géométrie sur un système simple et complet d'axiomes indépendants. » Concevons trois différents systèmes d'êtres : les points, les droites, les plans. Ces êtres ont entre eux des relations mutuelles. « La description complète de ces relations a lieu au moyen des axiomes de la Géométrie [2]. » Il y a,

1. Hilbert, *Les principes fondamentaux de la géometrie* trad. Laugel, p. 5.

2. Hilbert, *loc. cit.*, p. 7.

d'après M. Hilbert, cinq groupes d'axiomes : les axiomes d'association, de distribution, l'axiome des parallèles (postulat d'Euclide), les axiomes de congruence, l'axiome de continuité (axiome d'Archimède).

On sait que l'arithmétique de Peano[1] est fondée sur trois idées primitives : le zéro, le nombre entier, le suivant de; et sur cinq propositions primitives : zéro est un nombre; si *a* est un nombre, son suivant est aussi un nombre déterminé; si deux nombres *a* et *b* sont suivis par le même nombre, ils sont égaux; le nombre qui suit un nombre quelconque n'est jamais zéro; le principe d'induction complète.

Ces théories ne sont évidemment pas intangibles, elles sont perfectibles comme toutes les branches de la science humaine, et M. Peano a lui-même modifié quelque peu dans les éditions ultérieures de son formulaire, l'exposé précédent qui figure dans l'édition de 1898. Nous n'avons pas à examiner maintenant s'il y a lieu, au point de vue technique, de perfectionner la théorie de Peano; nous avons voulu simplement préciser sur des exemples la conception d'une théorie scientifique des principes dont Jules Tannery dégageait parfaitement l'esprit lorsqu'il disait : « que la notion de nombre entier elle-même résulte ou non de l'expérience,

1. Peano, *Formulaire de mathematiques*, 1898

c'est là l'objet de discussions purement philosophiques dans lesquelles je n'ai nullement la prétention d'entrer. Mais l'intérêt qu'il y a à constituer l'analyse avec cette seule notion et celle de l'infini, qu'elle implique déjà, est assez évident[1]. »
Que l'on puisse s'en tenir au point de vue strictement positif, dans l'exposé des principes de l'arithmétique et de la géométrie, c'est ce que les travaux que nous venons de citer établissent péremptoirement. Mais est-il interdit d'aller plus loin? Les tentatives qui ont pour but de chercher au-dessous des notions scientifiques précises une infrastructure philosophique sont-elles absolument vaines? Pour répondre à ces questions, nous chercherons tout d'abord, d'une manière générale, à caractériser la nature des principes métaphysiques qui devraient servir de base aux concepts de la science.

La métaphysique de la science cherche à déterminer, au-dessous des principes scientifiques, des principes philosophiques qui seraient le fondement des premiers. Or, il s'agit précisément de savoir, si ce qu'on appelle pompeusement « principes philosophiques » ou « principes rationnels » ne sont pas tout simplement les notions vagues et confuses de la conscience vulgaire. Ce serait par une sorte de jeu de mots qu'on appellerait *notions premières* les notions mêmes du sens commun. Ces notions

1. J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions*, 2e édition, I, p. 2.

seraient *premières* suivant l'ordre de leur apparition chronologique dans la conscience, en ce sens que c'est par elles que l'enfant commence à penser, mais elles ne seraient pas *premières* logiquement. Sans doute, la science n'invente pas de toutes pièces les notions dont elle se sert, nombre, grandeur, etc.; elle les puise dans la conscience vulgaire. Mais le développement de la pensée scientifique consiste à substituer des concepts bien définis à ces notions générales. Les idées claires de la science constituent donc une détermination supérieure des notions vagues du sens commun, et l'on ne saurait pas, sans une singulière contradiction, chercher dans les notions vagues la justification logique des concepts scientifiques. Aussi, lorsque M. Couturat nous disait : « toutes les définitions mathématiques du nombre impliquent l'*idée philosophique* du nombre entier conçu comme une collection d'unités : elles supposent les *idées rationnelles* d'unité et de pluralité [1] », ou encore que les définitions de la grandeur « présupposent l'idée rationnelle de grandeur [2] »; s'il entendait par là que ces notions vagues et indéfinissables constituent le « donné » d'où la science part et forment ses points d'attache avec le sens commun, nous tombons d'accord. Au point de vue de notre histoire psychologique, on peut dire que ces

1. Couturat, *Infini mathématique*, p. 342 (F. Alcan).
2. Couturat, *ibid.*, p. 369.

notions générales du sens vulgaire précèdent la science. Mais nous nions formellement qu'il existe entre les notions générales vulgaires et les concepts scientifiques des principes philosophiques susceptibles de former la base d'une métaphysique. La pensée scientifique passe directement des notions vulgaires de la pensée commune aux concepts scientifiques sans qu'une élaboration métaphysique soit nécessaire. Nous appuierons notre argumentation sur deux remarquables mémoires de M. Peano et de M. Burali-Forti :

« Une définition est réductible à une égalité, dont un membre (le premier) est le nom qu'on définit et l'autre en exprime la valeur. Exemple : « Dérivée d'une fonction = limite du rapport des accroissements de la fonction et de la variable [1] ».

Or, deux cas peuvent se présenter : ou bien nous pouvons exprimer le premier membre en fonction d'éléments connus et bien définis, ou bien nous ne le pouvons pas.

Dans le premier cas, la définition $x = a$, s'appelle une définition nominale. Mais, il se peut que nous ne sachions pas définir un objet nominalement, alors nous tombons dans le deuxième cas. On emploie alors la définition *par postulats* ou *par abstraction*. Dans la définition par postulats « le groupe x est défini au moyen de relations logiques

1. Peano, apud *Bibliothèque du Congrès de philosophie de* 1900, III, p. 279.

entre les x[1] ». « On définit *par abstraction* une opération f, lorsqu'on dit à quelle classe a elle est applicable, et que, x étant un élément quelconque de a, on établit quels sont les y de a, tels que $fy = fx$ »[2].

Comme on le voit, dans les définitions par postulats et par abstraction, on définit la notion en fonction de certaines propriétés de son mécanisme opératoire ; on ne tient pas compte de l'existence et de l'unicité de cette notion.

Ainsi donc : ou bien dans la définition nominale, on exprime la notion en fonction de concepts bien définis, ou bien, dans les définitions par postulats et par abstraction, on définit les propriétés opératoires de la notion, ces propriétés servant dorénavant à caractériser la notion. Mais, ni dans un cas, ni dans l'autre, on ne fait appel à un principe philosophique quelconque, à une intuition méta-scientifique ou méta-logique. Dans l'un et l'autre de ces modes de définitions, on n'exprime les notions primitives qu'en fonction d'éléments mathématico-logiques à partir de la notion vulgaire. Il est, d'ailleurs, évident que les notions qui ont d'abord été définies par abstraction peuvent quelquefois plus tard être définies nominalement, et la substitution des deuxièmes définitions aux premières dépend de considérations dans lesquelles nous ne pouvons entrer. Rappelons seulement que Dedekind, Peano,

1. Burali-Forti, *ibid.*, p. 294.
2. Burali-Forti, *ibid.*, p. 295.

G. Cantor[1] donnent du nombre des définitions par postulats et par abstraction, suivant en cela la méthode adoptée dans les traités d'arithmétique. MM. Burali-Forti[2], Russell et Couturat[3] donnent du nombre une définition nominale. Nous ne pouvons, à cause de son caractère trop technique, donner la définition nominale du nombre de M. Burali-Forti ; rappelons seulement qu'à la suite de M. Russell, M. Couturat définit le nombre cardinal comme une classe de classes[4]. Ces remarques que nous faisons sur le nombre, nous les ferions également sur la grandeur, que M. Burali-Forti[5] prétend avoir définie nominalement, sans faire appel logiquement à une notion philosophique et indéfinissable de la grandeur. Nous n'avons pas à apprécier ici ces diverses définitions.

Au moyen des définitions nominales ou des définitions par abstraction, on peut réduire tous les principes fondamentaux à des combinaisons de concepts logico-mathématiques bien définis qui déterminent les notions vulgaires en vue de leur usage scientifique. Cependant, il a pu sembler que cette conception ait été dépassée dans ces derniers temps, et certains esprits verront, peut-être, un

1. *Bibliothèque du Congrès de philosophie de* 1900, III, p. 296.
2. *Ibid.*, III, p. 297.
3. *Revue de Métaphysique*, n° mars 1904, p. 215.
4. *Ibid.*
5. *Bibliothèque du Congrès de philosophie de* 1900, III, p. 297.

retour à une métaphysique dans la théorie des *indéfinissables* de M. Russell. C'est ce point que nous voudrions examiner très sommairement. Constatons que dans sa logique, M. Russell ne s'attarde pas à méditer sur les indéfinissables, et ne cherche pas à établir leur origine sensible ou intelligible. Il oriente, si l'on peut dire, ces principes formels vers les différents moments du mécanisme opératoire : produit logique, principe de simplification, de composition, du syllogisme, etc. ; si bien que la notion indéfinissable trouve sa véritable signification dans ses applications. Le mathématisme logique est, d'après la théorie de M. Russell, un pur formalisme qui ne saurait s'attacher à l'existence absolue des indéfinissables. Il s'en sert uniquement comme de cadres, comme de glissières, dirions-nous, pour guider le mécanisme des opérations de la pensée scientifique. Non seulement ces indéfinissables n'ont pas dans l'esprit de M. Russell le caractère de principes premiers, qui, selon la conception de la métaphysique rationaliste, formeraient la base de la science, mais ils ont un caractère hypothétique très particulier. « L'essentiel [1], dans une théorie logique, est moins l'ensemble variable des principes que l'ensemble permanent des conséquences. » Si cette phrase de son savant interprète exprime bien la pensée de

1. Couturat, *Revue de Métaphysique*, 1904, p. 24.

M. Russell, il serait absolument contraire à l'esprit de sa doctrine d'y voir le point de départ d'un système de principes métaphysiques[1].

Si nous cherchions, maintenant, pour contrôler nos affirmations, à examiner, d'une manière précise, les définitions des principes philosophiques que donnent les métaphysiciens, nous verrions, comme nous l'avons déjà indiqué, qu'elles ne se distinguent en aucune façon des notions vulgaires. Mais nous ne pouvons songer à faire un tel examen d'une manière systématique : car, comme les définitions philosophiques varient avec les différents auteurs, un tel examen nous entraînerait à passer en revue toute l'histoire de la philosophie. Le lecteur se rendra compte aisément, en examinant les définitions philosophiques du nombre, du mouvement, de la causalité, qu'elles ne contiennent que des tautologies du sens commun. Le nombre est *une multiplicité d'unités* ; le mouvement est caractérisé comme la *synthèse des positions* du mobile ; la cause est définie comme ce qui *produit des effets*. En ce qui concerne cette dernière définition, nous nous bornerons à rappeler la décisive critique de Hume sur la notion de cause[2]. Relativement au

1. La phrase suivante de la préface du 1er volume des *Principia mathematica* de MM. Whitehead et Russell, qui vient de paraître, confirme notre thèse : « We have avoided both controversy and general philosophy. »

2. Hume, *Traité de la Nature humaine*, trad. Renouvier et Pillon, p. 206 et suiv.

principe de causalité, on sait que la science moderne a substitué aux notions obscures de cause et d'effet, la relation purement mathématique de correspondance entre une ou plusieurs variables et une fonction : les notions de variable, de fonction et de correspondance étant définies préalablement.

Mais, si les notions qu'emploie le métaphysicien sont les notions vulgaires déguisées, et si sa méthode n'est ni la mathématique, ni l'expérience mathématiquement conduite, comment, avec d'aussi mauvais matériaux, pourrait-il faire une œuvre ayant une valeur démonstrative ? Or, sans démonstration, il n'y a pas de théorie intellectuelle valable, et c'est cette incapacité à fournir des preuves, qui constitue le vice de toute philosophie métaphysique.

Les notions vulgaires ont été faites pour la pratique, pour les besoins de la vie, elles sont trop générales pour suffire à l'usage scientifique. Le développement de la science consiste précisément à substituer à ces notions de la pratique des concepts bien définis. Si les formes du discours grammatical, si les notions de la pensée commune avaient constitué un instrument suffisant pour la connaissance scientifique de l'univers, la mathématique n'aurait pas été créée. Ce n'est évidemment pas pour des motifs esthétiques, mais bien par suite de nécessités d'ordre intellectuel, que les géomètres ont été amenés à édifier cette science aride, difficile, mais vraie.

L'effort que fait la philosophie métaphysique ne correspond en lui-même à rien de réel. Cependant nous verrons que diverses disciplines positives ont été longtemps mêlées aux théories métaphysiques. La première sera caractérisée dans notre deuxième chapitre, mais dès maintenant nous donnerons des indications générales à son sujet. S'il est faux de croire que les notions vulgaires déguisées en principes métaphysiques constituent un fondement pour les principes scientifiques, il n'en reste pas moins vrai qu'un minimum de notions logiques et grammaticales, qu'un discours, en un mot, est nécessaire à l'exposition des principes des mathématiques[1]. En fait, il serait absurde d'essayer d'apprendre l'arithmétique à un enfant en bannissant de son esprit tout ce qui peut ressembler à de la logique générale ou à de la grammaire. Avant de déterminer les principes de l'arithmétique, il faut exposer le système des notions grammatico-logiques ; c'est ce que Peano a parfaitement compris, et dans son formulaire, le premier chapitre s'intitule[2] : *Logica mathematica*, et le deuxième : *arithmetica*. Mais autre chose est d'étudier objectivement les formes logiques du

1. On sait que dans les systèmes métaphysiques, comme chez Hégel, par exemple, la doctrine commence par des développements logiques (Wissenschaft der Logik) ; mais la logique n'est pas étudiée chez le métaphysicien comme une science, elle est exposée selon une méthode dialectique qui n'est, au fond, qu'une scolastique.

2. Peano, *Formulario mathematico*.

discours indispensables à la science, autre chose de transformer en cause métaphysique le sujet d'une proposition grammaticale. Les relations logico-grammaticales ne constituent pas ce qu'il y a de plus profond dans la science, au contraire, elles n'expriment que des conditions préliminaires d'exposition dont l'étude occupe une place extrêmement modeste dans l'ensemble des théories scientifiques ; cette étude n'est pas nulle, et cela suffit pour qu'on doive la maintenir dans un exposé critique des idées élémentaires ; elle n'implique pas, d'ailleurs, qu'il faille *réduire* le nombre aux notions grammatico-logiques.

Signalons encore une seconde catégorie de recherches légitimes dont l'idée première s'est peut-être trouvée dans les systèmes philosophiques ; mais le vice fondamental de la méthode métaphysique a rendu stérile un principe fécond [1] que nous allons dès maintenant mettre en lumière. On ne saurait rattacher directement les principes techniques de la science à une « activité synthétique de la pensée », à un « acte spirituel » du « sujet pensant ». Cette « activité synthétique », cet « acte spirituel » sont caractérisés en termes généraux,

1. Chez la plupart des métaphysiciens modernes, chez Hégel et Spencer, par exemple, la notion du développement occupe une place prépondérante ; mais il s'agit d'un processus dialectique chez l'un, chez l'autre d'une reconstruction totale de l'univers à partir de quelques vagues notions mécaniques, reconstruction qui n'a aucune valeur scientifique.

et la vie originale de la pensée que le métaphysicien croit saisir avec des mots, lui échappe, puisque ces mots, signes des notions communes, ne sont que des instruments du discours. L'expérience et le calcul seuls nous permettent, en effet, de nous évader du cercle des lieux communs. Il est donc vain d'opposer, comme on l'a fait souvent [1] dans des développements oratoires, « l'esprit d'invention », le « génie-créateur » — termes qu'on ne saurait évidemment définir scientifiquement et qui ne sont que des expressions métaphysiques ou vulgaires — à la science toute faite, espérant justifier ainsi un idéalisme d'apparence scientifique.

Vouloir fonder sur une cause transcendante les principes scientifiques est une entreprise chimérique. Mais le métaphysicien qui s'efforce d'accomplir cette tâche stérile, empreinte, si l'on s'en tient à la lettre, du plus grossier matérialisme, est peut-être inconsciemment sollicité par une exigence légitime de la pensée. Il y a une lacune à combler. Un système statique de principes — un système à une époque déterminée — ne se suffit pas absolument à lui-même. Mais nous chercherons dans l'état de la science d'hier la cause de l'état de la science d'aujourd'hui. L'exposé de la genèse des principes et des théories complètera l'étude

1. Par exemple M. Le Roy.

statique des systèmes d'axiomes. Ainsi la causalité historique dans le temps est substituée à la causalité du métaphysicien hors du temps. Nous préciserons plus tard les caractères que doit posséder cette histoire critique des principes de la science. Pour le moment, il nous suffit de constater que si l'on s'efforce de « séculariser » les doctrines transcendantes, si l'on cherche à mettre au jour les théories positives qui restaient enfouies sous la phraséologie métaphysique, on voit que l'on peut classer ces théories sous trois chefs principaux : l'étude des éléments grammatico-logiques (tâche restreinte); la détermination statique (à une époque déterminée) des principes élémentaires des sciences spéciales; l'histoire de ces principes.

A aucun moment dans le travail d'approfondissement et de détermination des principes fondamentaux de la science, n'interviennent une méthode différente, des principes différents de ceux employés dans la science, et à partir du moment où le mathématisme s'est appliqué aux données contingentes de la conscience vulgaire, l'orientation de la pensée ne change jamais de sens. Ce serait méconnaître complètement l'esprit de la Critique des sciences, que d'y voir autre chose que le premier chapitre des sciences positives. C'est évidemment le point faible des belles études de M. Couturat sur les travaux de M. Russell, qu'on ne

sache pas nettement si l'on a affaire à une philosophie, ou à la branche la plus abstraite des mathématiques. Quoi qu'il en soit, une chose demeure certaine pour nous, c'est que le système des principes des sciences ne peut être considéré comme une doctrine objective que s'il est élaboré d'après les méthodes scientifiques en dehors de toute systématisation philosophique. Dans l'étude des principes de la science comme dans l'élaboration de ses théories techniques un même esprit doit régner.

L'ouvrier qui creuse le sol et prépare les fondations d'une maison et celui qui bâtit ses murs poursuivent le même but : la construction de l'édifice. Il en est de même dans la science. Celui qui détermine les idées primitives et les axiomes et celui qui développe les théories techniques travaillent à la même œuvre : le développement de la science. Il est inadmissible que l'esprit de système puisse continuer à sévir dans l'exposé des principes, alors qu'il est banni du corps de la science.

Sans entrer dans le détail des théories, et pour justifier sur des exemples les considérations générales que nous venons d'exposer, nous allons examiner certaines thèses de la philosophie kantienne et néo-kantienne, philosophies qui se rapprochent le plus de la véritable critique scientifique, mais qui s'en distinguent cependant sur des points essentiels. L'examen des autres métaphysiques de la

science étendrait inutilement cette étude, car les objections que nous ferons au criticisme s'appliqueraient *a fortiori* au néo-thomisme et au néo-hégélianisme.

II

APPLICATION DES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES AU KANTISME ET AU NÉO-KANTISME

En premier lieu, il importe de rappeler la position de Kant vis-à-vis de la logique formelle. Kant distingue nettement la logique générale ou formelle de la logique transcendentale. Les textes sur ce point sont fort nombreux. Nous ne citerons que les plus décisifs [1]. « La logique générale fait abstraction comme nous l'avons indiqué de tout contenu de la connaissance, c'est-à-dire de tout rapport de la connaissance à l'objet, et elle n'envisage que la forme logique des connaissances dans leurs rapports entre elles, c'est-à-dire la forme de la pensée en général. » Voici maintenant le texte de la *Critique de la Raison pure* où Kant fixe les bases de la logique formelle : « Si l'on fait abstraction de tout contenu d'un jugement en général, et que l'on n'envisage que la pure forme de l'entendement, on trouve que la fonction de la

1. Kant, *Critique de la Raison pure*, trad. Barni, I, p. 115.

pensée dans le jugement peut être ramenée à quatre titres, dont chacun contient trois moments [1]. »

Suit le tableau de ces quatre fonctions logiques et de leurs moments. Or, c'est sur ce tableau qu'est calquée la table des catégories qui donne, selon Kant, « la liste de tous les concepts originairement purs de la synthèse qui sont contenus *à priori* dans l'entendement [2] ».

Il est surprenant que le tableau des quatre fonctions logiques du jugement et la table des catégories qui en découle, s'introduisent sans aucune démonstration et sans justification dans le corps du système. Aussi, la critique sévère de M. Couturat semble-t-elle absolument justifiée sur ce point : « Il s'est contenté d'emprunter à la vieille logique scolastique des formules surannées et un cadre tout fait [3]. » On sait aujourd'hui combien insuffisante, et même erronée, était la logique syllogistique de l'école ; Kant eut le tort de l'accepter sans critique. Nous ne croyons pas avoir besoin d'insister sur une question qui semble maintenant résolue : la partie de la *Critique de la Raison pure* qui traite de la logique formelle n'est plus défendable. Mais en est-il de même de la logique transcendentale? Kant la définit de la manière suivante : «..... Il y aurait une logique où l'on ne ferait pas abstrac-

1. Kant, *ibid*,, I, p. 128.
2. Kant, *Ibid*., I, p. 138.
3. Couturat, *Revue de Métaphysique*, mai 1904, p. 380.

tion de tout contenu de la connaissance. Cette logique rechercherait aussi l'origine de nos connaissances des objets..... tandis que la logique générale n'a point à s'occuper de cette origine de la connaissance, et qu'elle se borne à examiner nos représentations au point de vue des lois suivant lesquelles l'entendement les emploie et les relie entre elles lorsqu'il pense. Que ces représentations aient leur origine *à priori* en nous-mêmes, ou qu'elles nous soient données empiriquement, peu lui importe ; elle s'occupe uniquement de la forme que l'entendement peut leur donner, de quelque source, d'ailleurs, qu'elles puissent dériver..... Une science qui déterminerait l'origine, l'étendue et la valeur objective de nos connaissances devrait porter le nom de logique transcendentale [1]. » La logique transcendentale constitue ainsi le fond même de la *Critique de la Raison pure*.

La tâche que Kant assigne à la logique transcendentale dans la citation précédente ne coïncide donc en aucune façon avec celle de la critique scientifique telle que nous l'avons caractérisée plus haut (détermination des idées primitives et des axiomes indépendamment de tout problème métaphysique), puisqu'il fixe comme but principal à la théorie transcendentale la recherche de l'origine des éléments de la pensée. Au début de la troisième

1. Kant, *Critique de la Raison pure*, I, p. 115.

section de l'analytique transcendentale intitulée : *Représentation systématique de tous les principes synthétiques de l'entendement pur*, Kant s'exprime ainsi : « Je désignerai[1] donc ceux-là sous le nom de principes *mathématiques* et ceux-ci sous le nom de principes *dynamiques*. Mais on remarquera que je n'ai pas plus en vue dans un cas les principes des mathématiques que ceux de la dynamique (physique) générale dans un autre, mais seulement ceux de l'entendement pur dans leur rapport avec le sens intérieur. ». Dès lors il ne s'agit pas d'exposer le système des principes techniques de la science : Kant nous maintient dans le domaine des généralités, et notre thèse se trouve encore vérifiée. Mais les continuateurs contemporains de Kant, Hermann Cohen, Natorp reconnaissent que la doctrine kantienne est incomplète et qu'il est nécessaire de la réadapter à la science moderne. Allons-nous donc enfin trouver une philosophie qui ait fait progresser sur des points précis la critique des principes des sciences ou leur histoire, ou qui, tout au moins, ait élucidé quelque théorie difficile relative aux fondements de la science ? Nous étudierons en le rapprochant de la doctrine kantienne l'ouvrage de Natorp[2] où la doctrine de l'*idéalisme critique*, est

1. Kant, *Critique de la Raison pure*, trad, Barni, I, p. 220.

2. Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften*, 1910.

parfaitement mise au point. Nous nous bornerons à l'examen de quelques thèses significatives.

Tout d'abord cherchons à caractériser brièvement l'esprit dans lequel l'ouvrage est conçu. Natorp croit nécessaire de suspendre son système à une « cause première » à un « principe des principes » (pp. 11-26). Ce principe des principes a un nom nouveau, il s'appelle (comme chez H. Cohen) *Prinzip des Ursprungs*, principe de l'origine; mais sous ce nom nouveau nous retrouvons une vieille connaissance, car l' « Ursprung » a une parenté évidente avec l' « idée hégélienne », et nous donnons en note quelques textes qui précisent la conception de Natorp [1]. Nous nous som-

1. Natorp, *ibid.*, p. 21 : « Das Ursprüngliche ist somit nicht Bejahung noch Verneinung, nicht Identität noch Verschiedenheit... sondern Zusammenhang; nicht durch hinterherkommendes Sichvertragen und Vereinbaren, sondern durch wurzelhafte, durch Ursprungseinheit. »

Ibid., p. 26 : « Aber es ist eben die Einheit von diesem allen (die logischen Grundmomente) die Einheit durch Korrelation. Diese ist in der Tat als das Prinzip der Prinzipien, in bestimmter Überordnung gegen die ganze Reihe der einzelnen, zu einander korrelativen Grundmomente des Logischen zu denken. »

Ibid., p. 38 : « Aber Denken heisst überhaupt Bestimmen. Also kann die Bestimmtheit jedenfalls nicht immer wieder, und nicht im ursprünglichen Fall, vor dem Denken voraus dem Denken, zu denken gegeben sein, sondern nur das Denken selbst kann sie vollziehen... Sondern es muss ein Grundakt des Denkens angesetzt werden, in dem überhaupt irgendwelche Bestimmtheit für das Denken zuerst entsteht, ein Grundakt also des Bestimmens. »

Comparez avec Hegel, *Logique*, trad. Véra, 2e édition, I. 212 : « L'idée est la pensée non comme pensée purement

mes déjà expliqué au sujet de ces principes transcendants, nous savons qu'en les formulant, ou bien on exprime une vérité évidente, à savoir que la pensée n'est pas purement machinale, qu'elle a un certain caractère synthétique que personne n'a jamais contesté sérieusement (en ce qui concerne tout au moins la *découverte* scientifique) ; ou bien l'on croit vraiment saisir dans quelques phrases la loi même de la pensée d'où se déduiraient effectivement les différents principes de la logique et des sciences. Mais cette dernière thèse est contredite par les faits.

Nous savons en effet parfaitement que ni Hégel ni Natorp ne déduisent de leur principe fondamental (Idée, Ursprung), une propriété scientifique quelconque ; nous savons que leur méthode n'est qu'un procédé d'exposition pour des connaissances antérieurement acquises. Si la loi de l'esprit qu'ils expriment était autre chose qu'un assemblage de mots, on devrait pouvoir en déduire *à priori* quelque proposition intéressante. Or cela n'est pas, cela ne peut pas être. Nous sommes donc en présence de définitions verbales qui n'expriment qu'un truisme : l'affirmation de la spontanéité de la pensée.

Mais ce point de départ vicie toute la doctrine :

formelle, mais comme totalité qui se développe elle-même dans ses déterminations et dans ses lois, et par suite, ces déterminations et ces lois, elle ne les trouve pas en elle-même comme des éléments qui sont déjà en elle, et qui lui sont donnés d'avance, mais elle se les donne elle-même. »

Natorp n'aborde pas les problèmes de la logique objectivement en étudiant avec précision les différents types de raisonnements, les formes du langage d'après la méthode employée par Boole, Schröder, Peano, Couturat, etc. Il considère les différentes catégories logiques de l'Ecole comme les articulations d'un système, de son système ; et nous voyons défiler devant nous, comme dans toutes les rhapsodies métaphysiques, la qualité, la quantité, la relation, la modalité. Citons à titre d'exemple les définitions qui concernent la quantité [1]. Les trois degrés de la quantité sont caractérisés de la manière suivante : une pluralité est une pluralité d'unités, l'*unité* est donc le point de départ nécessaire ; toute unité est unité d'une pluralité, d'une *série ;* enfin le *tout* exprime l'unité de la pluralité au sens de l'union dans un total. Qui soutiendra sincèrement que ces banalités peuvent servir au progrès de la critique des principes de la logique ou de la science ?

Examinons maintenant brièvement la théorie de l'espace et du temps chez Kant et chez ses continuateurs.

ESPACE

Tout d'abord nous voudrions établir, en réduisant au minimum les considérations historiques,

1. Natorp, *loc. cit.*, p. 52.

que si l'on se place au point de vue de la recherche critique sur les postulats de la géométrie, recherche qui est liée à l'analyse de la notion d'espace, les résultats positifs ont été obtenus dans les temps modernes par une suite de géomètres : par Saccheri [1], Lambert, Legendre, Gauss, Lobatschewsky, Riemann, etc. Nous ne voyons aucunement que la théorie de l'espace de Kant, qui chronologiquement se place entre les travaux de Lambert et ceux de Gauss, ait fait progresser la théorie des postulats sur un point précis quelconque. Kant a-t-il examiné les postulats fondamentaux de la géométrie d'Euclide, en cherchant à voir d'une façon précise s'ils étaient démontrables, s'ils étaient indépendants, s'ils étaient nécessaires, quels étaient enfin, leurs rapports avec l'intuition de l'espace ? Aucunement, et tandis que la critique des postulats semble avoir été nettement conçue par Saccheri et Lambert [2], Kant revient aux conceptions métaphysiques, aux considérations générales. « Qu'est-ce donc que l'espace et le temps, se demande Kant, sont-ce des êtres réels ? Sont-ce seulement des déterminations ou même de simples rapports des choses [3] ? » La solution que Kant devait donner à ces problèmes philosophiques, pouvait-elle être de

1. Mansion, *Bericht über den III Kongress für Philosophie zu Heidelberg*, p. 439.

2. Mansion, *ibid.*, p. 440.

3. Kant, *Critique de la Raison pure*, I. p. 77.

quelque utilité pour les géomètres qui se sont appliqués après lui à déterminer les principes de la géométrie ?

On sait que l'analyse de Gauss et de Riemann devait aboutir à une sorte de généralisation de la géométrie d'après laquelle la géométrie d'Euclide n'est plus qu'un cas particulier de la géométrie générale. Le concept général de variétés [1] à n dimensions, d'où dépend la détermination du point dans un espace, ayant été mis en évidence, la géométrie ordinaire correspond au cas particulier ou $n = 3$. En partant de la définition [2] de l'élément linéaire, Riemann a également mis en relief l'importance de la notion de courbure de l'espace.

On conçoit dès lors la possibilité logique de géométries qui se distinguent par la valeur de cette courbure : les géométries dont l'espace a une courbure variable (où le mouvement des figures invariables est impossible) ; les géométries à courbure constante différente de zéro, positive ou négative (où le mouvement des figures invariables est possible) ; les géométries à courbure constante nulle (où le mouvement des figures invariables est possible et où il existe des figures semblables). Ce dernier cas correspond à la géométrie euclidienne. Ces résultats étaient-ils contraires ou non à la thèse

1. Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, trad. Hoüel, p. 2.

2. Riemann, *ibid.*, p. 6.

fondamentale de Kant? Les historiens discutent : Mansion[1] pense que la géométrie non-euclidienne constitue une réfutation de la thèse de Kant; Natorp se range à l'avis contraire[2]. Sans chercher à trancher le débat, citons le texte suivant, bien connu, qui semblerait donner raison à Mansion : « Les propositions géométriques, comme celle-ci par exemple : l'espace n'a que trois dimensions, sont toutes apodictiques, c'est-à-dire qu'elles impliquent la conscience de leur nécessité[3]. »

Mais il nous suffit de constater que la critique scientifique des postulats de la géométrie s'est développée complètement en dehors de la théorie kantienne de l'espace.

Si les géométries nouvelles (résultat de cette critique) n'ont pas rencontré dans le kantisme un obstacle, elles n'y ont certainement pas trouvé un auxiliaire.

Chez Natorp, la position est plus claire; l'auteur connaît les géométries non-euclidiennes et les géométries à n dimensions; il admet leur légitimité et leur utilité. Mais il discute la validité des conclusions empiristes que les inventeurs des géométries nouvelles, Gauss, Riemann, ont cru devoir formuler, et nous accepterions complètement les conclusions de Natorp, sur ce point, s'il n'es-

1. Mansion, *loc, cit.*

2. Natorp, *loc. cit.*, p. 309.

3. Kant, *Critique de la Raison pure*, I, p. 80.

savait pas de substituer à une métaphysique empiriste *sa* métaphysique rationaliste.

Si, nous dit Natorp, les géométries non-euclidiennes sont toutes légitimes au point de vue de la logique pure, puisqu'elles sont exemptes de contradictions, il n'en est plus de même au point de vue de la *logique de l'existence*. Cette logique, résurrection de la logique transcendentale, formule, d'après Natorp, les conditions nécessaires qui rendent possible une expérience. Il ne peut y avoir, du point de vue de la logique de l'existence, qu'*un* espace [1] parfaitement déterminé. Et le seul espace qui possède les caractères exigés par la logique de l'existence est, d'après Natorp, l'espace euclidien à trois dimensions, forme *a priori*, qui conditionne l'expérience, mais qui ne saurait être un objet d'expérience. La conception purement apriorique de Natorp est en contradiction manifeste avec la théorie de M. Poincaré. Natorp invoque néanmoins [2] les conclusions générales des travaux du célèbre mathématicien en faveur de sa philosophie. Il s'appuie notamment sur le texte suivant :

« En résumé [3], de quelque façon que l'on se retourne, il est impossible de découvrir à l'empirisme géométrique un sens raisonnable. »

1. Natorp, *Die logischen Grundlagen...*, p. 304.

2. Natorp, *ibid.*, p. 302.

3. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 100.

Mais M. Poincaré a écrit aussi : « L'expérience[1] nous guide dans ce choix (*entre les diverses géométries*) qu'elle ne nous impose pas. » Et encore : « c'est là que nous avons vu intervenir l'expérience; si la droite euclidienne est plus *remarquable* que la droite non-euclidienne, c'est avant tout qu'elle diffère peu de certains objets naturels remarquables dont la droite non-euclidienne diffère beaucoup[2]... » Le texte suivant, en particulier, est en complète contradiction avec la théorie de Natorp. « Mais[3], ce rôle (*le rôle de l'expérience dans le choix de la géométrie la plus commode*), n'en était pas moins très important ; ce rôle aurait été inutile s'il existait une forme *a priori* s'imposant à notre sensibilité et qui serait l'espace à trois dimensions. »

Nous n'avons pas à reprendre les considérations sur les principes de l'*Analysis Situs* par lesquelles M. Poincaré arrive aux conclusions générales précédentes. Ce que nous voulons seulement prouver, c'est que les critiques de M. Poincaré se retournent aussi bien contre la philosophie kantienne que contre la philosophie empiriste. Après l'analyse de M. Poincaré, Natorp veut encore démontrer que l'espace à trois dimensions est une forme *a priori* qui s'impose à l'univers ; quelques-uns de ses arguments sont singuliers. La « logique de l'existence »

1. Poincaré, *ibid.*, p. 91.
2. Poincaré, *La valeur de la Science*, p. 61.
3. Poincaré, *ibid.*, p. 127.

exige l'unicité et la complète détermination du concept d'espace, d'où la nécessité d'un nombre *limité* de dimensions. « Dépasser[1] la conception de l'espace à trois dimensions (même en conservant la constitution euclidienne de l'espace) conduit à une indétermination indéfinie, par suite rend impossible une détermination d'existence. » Mais ce raisonnement est inadmissible. La question est précisément de savoir pourquoi l'on s'arrête à trois plutôt qu'à deux ou à quatre dimensions. Dans le cas de quatre dimensions, le concept serait parfaitement déterminé et unique.

On connaît la solution de M. Poincaré, elle est analogue dans le cas des géométries à plus de trois dimensions, à celle qu'il a adoptée dans le cas des géométries non-euclidiennes.

L'expérience qui ne peut décider de la vérité absolue des différents types de géométrie nous suggère parmi les géométries possibles celle que nous devons pratiquement choisir. « Dans[2] notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes... L'expérience nous a guidés en montrant quel choix s'adapte le mieux aux propriétés de notre corps... » Rappelons encore le passage

1. Natorp, *loc. cit.*, p. 307. « Das das Hinausgehen über drei Dimensionen (und zwar Euclidischer Konstitution) in unendliche Unbestimmtheit führt, also eine Existentialbestimmung unmöglich machen würde. »

2. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 109.

suivant souvent cité : « Que doit-on penser de cette question : la géométrie[1] euclidienne est-elle vraie ? Elle n'a aucun sens. Autant se demander si... les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. »

Il semble donc que la critique de M. Poincaré nous permette de renvoyer dos à dos le spencérien et le kantien.

Transformerons-nous, à leur tour, en propositions métaphysiques les remarques méthodologiques de M. Poincaré ? Construirons-nous à partir de certaines de ses affirmations, un « nominalisme empirico-idéaliste » (car ce sont ces épithètes contradictoires qui caractériseraient une telle philosophie) ? Assurément non, car si nous agissions ainsi, nous retomberions dans les difficultés que nous voulions précisément éviter.

Aux querelles interminables entre empiristes et idéalistes, nous aurions simplement substitué des discussions entre M. Poincaré et M. Le Roy[2] ou tel autre philosophe. Mais vraiment, est-ce que les analyses savantes de Gauss, de Riemann, de Poincaré, de Hilbert, n'ont eu pour but que de rajeunir une vieille querelle métaphysique ? Certainement non. Nous savons que ces géomètres s'étaient proposé de déterminer les postulats de la géométrie, de préciser leur nature non au point de vue

1. Poincaré, *ibid.*, p. 66.
2. Poincaré, *La valeur de la Science*, p. 213 et suiv.

de leur origine absolue, mais au point de vue de la méthode mathématique : étaient-ils démontrables ou indémontrables, nécessaires, c'est-à-dire leur suppression devait-elle conduire à des contradictions, ou non nécessaires ? Les géomètres qui ont créé la géométrie non-euclidienne et les géométries à n dimensions avaient surtout en vue de perfectionner l'instrument mathématique. Ils n'ont sans doute pas aperçu, à l'origine, le parti que la haute analyse pouvait tirer de leurs conceptions, par exemple dans l'étude de la formation des groupes fuchsiens (Poincaré) ou dans la construction de domaines fondamentaux relatifs à la théorie des fonctions abéliennes, etc. Mais il est certain qu'ils ne pensèrent pas que la recherche sur les principes a une valeur métaphysique indépendamment de la science proprement dite, et c'est surtout le développement de la science future qu'ils avaient en vue. Disons donc, pour conclure sur ce point, qu'il ne faut pas orienter le système des principes vers une métaphysique, mais vers la science.

Une question plus que toute autre a pu paraître liée nécessairement à la métaphysique ou à la théorie de la connaissance, c'est celle du rapport des postulats de la géométrie avec l'expérience. Revenons donc, en terminant, encore une fois sur ce problème afin d'anéantir les équivoques. Tenons-nous en aux deux principales observations de M. Poincaré.

D'abord, l'expérience, qui n'est qu'approximative, ne peut décider de la vérité objective des propositions fondamentales d'une science logiquement exacte comme la géométrie (si l'angle que font deux droites passant par un premier point distant d'un second point, comme Sirius l'est de la Terre, est égal à un millionième de seconde, nos instruments de mesure ne pourront décider si l'on peut mener une ou deux parallèles passant par le premier point à une droite menée par le second — exemple de F. Klein). Mais cette première observation n'a rien de métaphysique, ni même de philosophique ; c'est une constatation sur la nature de la méthode expérimentale que tout le monde peut faire. La seconde considération de M. Poincaré, c'est que l'expérience détermine notre choix entre plusieurs conceptions logiquement possibles. Remarquons que les savants ont adopté le type de géométrie euclidien avant d'avoir eu un choix à faire, au sens exact du mot, entre des conceptions géométriques diverses. Euclide, continuateur d'une tradition déjà longue, a formulé ses principes plus de vingt siècles avant l'éclosion des idées non-euclidiennes. La détermination de notre géométrie pratique se présente donc comme le résultat d'une expérience séculaire et non comme un choix véritable résultant d'une délibération à un instant donné : nous nous trouvons, en un mot, en face de la conclusion d'un long développement historique.

Si l'on se reporte, en effet, à l'histoire de la Géométrie et de la Mécanique, on constate manifestement le rôle que l'expérience a joué dans la formation de sciences qui, à l'origine, furent uniquement des techniques d'artisans (arpentage, etc.). La seconde considération de M. Poincaré doit donc être interprétée comme la confirmation d'un fait historique, et à ce point de vue elle est indépendante de toute métaphysique. Ne cherchons donc pas à transformer une règle de méthodologie expérimentale et une constatation historique en articulations d'une métaphysique empirico-nominaliste. Résignons nous à reconnaître que des questions aussi vagues que celle-ci : quelle est la valeur objective de la connaissance ? ne comportent également que de vagues réponses qui, formulées dans la langue de l'opinion, seront comme les opinions (philosophiques, religieuses, politiques) l'objet de discussions sans fin.

LE TEMPS

Ayant examiné brièvement la théorie de l'espace chez Kant et chez Natorp, nous allons, par raison de symétrie, faire quelques brèves observations à propos de leurs théories du temps. La théorie kantienne du temps est conçue dans le même esprit que la théorie kantienne de l'espace ; par suite les critiques que nous avons formulées contre la

deuxième théorie peuvent d'une manière générale s'appliquer à la première.

Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons plus spécialement de la philosophie néo-kantienne ; nous examinerons encore l'ouvrage de Natorp qui, si nous n'en acceptons pas les principes, n'en a pas moins été élaboré avec une conscience et un soin remarquables.

Rappelons quelques-unes de ses formules. Tout d'abord les caratères fondamentaux que possède le temps et qui le rendent apte à la détermination des existences sont[1] : *l'unicité*, *l'irréversibilité*, *l'homogénéité*, *la continuité*. Mais tandis que l'espace est l'ordre de la *coexistence*, le temps est l'ordre de la *succession* ; d'où Natorp déduira que le temps sépare les éléments tandis que l'espace les unit[2]. Mais pour unir, il faut qu'il y ait une préalable séparation : le temps est donc la condition de l'espace. Ces dernières propositions constituent de simples truismes. Quant aux caractères élémentaires du temps : unicité, irréversibilité, homogénéité, continuité, nous les voyons déjà mis en évidence dans la physique newtonienne, et la philo-

1. Natorp, *Die logischen Grundlagen...*, p. 281.

2. Natorp, *ibid.*, p. 288. « Die Raumordnung als solche eben Zusammenordnung, Ordnung des Miteinander ist, also in ihr die Verbindung als Verbindung ebenso vorwaltet und ursprünglich bestimmend ist, wie in der Zeit die Sonderung als Sonderung. » et p. 289 : « ... dass Zeit ursprünglich Sonderung, Raum ursprünglich Verbindung bedeutet. »

sophie critique n'apporte sur ce point rien de nouveau. Mais examinons plutôt ce qui se passe à notre époque. A la suite de considérations purement scientifiques, l'on a cru récemment devoir modifier la conception même du temps et rejeter son *unicité*, détruisant ainsi la conception d'*un* temps universel. Nous n'aurions pas osé aborder les profondes et difficiles théories de Lorentz et d'Einstein, si Natorp ne nous en avait donné l'exemple. Nous nous en excusons. Ce n'est d'ailleurs pas de l'exposition d'une doctrine qui touche aux bases mêmes de la Mécanique et de la Physique qu'il s'agira ici ; nous nous bornerons à donner quelques indications sur les conceptions nouvelles. Ces indications seront, nous l'espérons, assez explicites pour permettre de comprendre les observations de Natorp et montrer une fois de plus l'insuffisance de la critique transcendentale comme méthode dans la recherche des principes fondamentaux de la science.

On sait que c'est en cherchant à établir les équations générales de l'électrodynamique des corps en mouvement que Lorentz[1] fut conduit à introduire de nouvelles notions. Sa théorie, sous sa première forme, avait pour conséquence singulière que le principe de la relativité du mouvement n'y était plus vérifié ; par suite l'on aurait dû pouvoir déterminer le mouvement absolu de la Terre par

1. Lorentz. *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* Leiden, 1895.

rapport à l'éther en repos. Or, les expériences de Michelson et de Morley contredirent ce résultat. Fallait-il donc renoncer à des conceptions qui paraissaient contenir les principes de la théorie la plus compréhensive que la Physique possédât concernant l'électrodynamique ? Lorentz et Fitz-Gérald, en introduisant la conception du temps local et le principe de la contraction des corps en mouvement dans le sens de la translation, devaient mettre la théorie d'accord avec les expériences de Michelson.

Les principes élémentaires de la théorie nouvelle[1] peuvent, d'après Einstein[2], se résumer brièvement de la manière suivante :

Le *principe de la relativité du mouvement* qui peut se formuler ainsi : les lois de la nature ne changent pas de forme, soit que l'on considère les axes de coordonnées, qui servent de repères, au repos, soit qu'on les considère comme soumis à un mouvement uniforme (nous laissons de côté dans ces indications sommaires le cas où les axes seraient soumis à un mouvement accéléré).

Le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.

La définition du temps local.

1. Einstein, *Jahrbuch der Radioaktivität und Electronik*, vol. IV, p. 415.

2. Il y a entre la théorie de Lorentz et celle d'Einstein des différences sur lesquelles nous ne pouvons insister ici.

L'hypothèse de la contraction des corps dans le sens de la translation, (*qui se déduit des principes précédents*).

Les deux dernières notions exigent quelques éclaircissements.

M. Poincaré a déjà, par deux fois, exposé [1] la définition du temps local, ce qui nous permettra d'être bref. Considérons deux points A et B ; en chacun de ces points se trouve un observateur muni d'une montre. Si les points A et B sont au repos, l'opération du *réglage des montres* se fera sans difficultés en croisant des signaux optiques, la lumière mettant le même temps pour aller de A en B que de B en A. Mais si les points A et B sont entraînés dans un même mouvement, il n'en est plus de même « parce qu'alors A ira au devant de la lumière qui vient de B, tandis que B fuira devant la lumière qui vient de A. Si donc les observateurs sont entraînés dans une translation commune, et s'ils ne s'en doutent pas, leur réglage sera défectueux ; leurs montres n'indiqueront pas le même temps ; chacune d'elles indiquera le *temps local* convenant au point où elle se trouve. » Encore faut-il que les observateurs puissent se rendre compte de l'inexactitude de leurs observations ; or, quand on a pu dans les calculs tenir compte du carré de la valeur $\frac{v}{c}$, v

1. Poincaré, *La valeur de la Science*, p. 187 et *Science et Méthode*, p. 236.

représentant la vitesse du corps entraîné, c la vitesse de la lumière, on a cru que l'on pourrait mettre en évidence l'inexactitude du réglage dans l'observation relatée plus haut. Cependant, il n'en est rien : les expériences de Michelson et de Morley donnèrent des résultats négatifs. « La théorie demandait à être complétée, elle l'a été par l'hypothèse de Lorentz et de Fitz-Gérald [1]. »

Lorentz admet que les corps en mouvement subissent dans le sens de la translation une contraction qui est mesurée par la fraction $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, v et c ayant la signification que nous venons d'indiquer. Cette hypothèse permet d'expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson. L'erreur de réglage dont nous avons indiqué la cause sera compensée par la contraction que subissent les corps en mouvement ; une longueur n'étant plus mesurée par un mètre qui subirait aussi la loi de contraction, mais par le temps que la lumière met à la parcourir.

Nous n'avons pas à rappeler ici les conséquences de cette théorie ; disons seulement que la vitesse de la lumière doit être considérée comme la limite supérieure que ne peut dépasser aucune vitesse réelle et que la loi classique de la composition des vitesses est remplacée par une autre loi. « Le cas

1. Poincaré, *Science et Méthode*, p. 238.

d'une vitesse supérieure à celle de la lumière, dit Hermann Minkowski, ne jouera plus, (dans la mécanique nouvelle), qu'un rôle analogue à celui des figures à coordonnées imaginaires dans la Géométrie [1]. »

Les théories de Lorentz, d'Einstein, de Minkowsky ont pour la physique mathématique un intérêt immense, si l'on considère surtout la place prépondérante que l'Electrodynamique tend à prendre dans la physique moderne [2]. Selon Natorp, les idées nouvelles n'altéreraient ni la théorie de Kant sur le temps, ni la sienne. Sa conclusion est la suivante : « On a ainsi établi que la géométrie non-euclidienne et la géométrie à plus de trois dimensions, de même que les théories analogues concernant le temps, doivent être considérées comme d'excellentes méthodes pour la résolution de problèmes spéciaux, mais elles ne changent absolument rien ni à la conception logique, ni au fondement logique des déterminations purement mathématiques du temps et de l'espace [3]. »

Nous avons déjà dit à propos de la théorie de l'espace et nous redisons ici à propos de la théorie du temps que si l'on retranche de la recherche sur les

1. H. Minkowsky, *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, XXV, p. 505.

2. Signalons que les théories nouvelles soulèvent des difficultés qui ont été mises en évidence par Ritz (*Scientia*, 1907, nº 2) et par Castelnuovo (*Scientia* 1911, nº 1) etc.

3. Natorp, *loc. cit.*, p. 404.

notions fondamentales toutes les théories nouvelles que la science apporte dans son développement, le résidu qui constituera l'objet propre de la philosophie, ne sera plus qu'un ensemble de lieux communs. Si dans l'ouvrage de Natorp (et dans les ouvrages contemporains analogues), on supprimait la partie négative — à son point de vue — où il discute la valeur philosophique des nouvelles théories scientifiques pour ne conserver que la partie positive — seule essentielle évidemment — il ne resterait plus que quelques pages contenant la définition du temps comme « une succession », de l'espace comme une « coexistence » (des éléments) et des définitions analogues. On peut dire que la tâche du critique de la science est exactement opposée à celle que lui fixe Natorp : il doit principalement étudier les théories nouvelles qui peuvent servir à résoudre des problèmes (wertvolle Hilfe bei der Bearbeitung besonderer Probleme). Ce qui prouve, en effet, l'objectivité d'une théorie, c'est l'usage scientifique qu'on en peut faire, c'est sa fécondité. Par suite le plus grave reproche que l'on puisse faire à la théorie kantienne, c'est précisément de dire comme Natorp qu'elle est tellement générale que la plupart des transformations de la science réelle ne l'atteignent pas.

Le raisonnement par lequel Natorp termine ses observations sur ces difficiles questions est des plus contestables. Kant aurait été un précurseur des phy-

siciens contemporains parce qu'il aurait affirmé[1] que « l'époque des phénomènes est fixée non par rapport à un temps absolu mais par la détermination relative des phénomènes les uns par rapport aux autres dans le temps » ; par suite, selon Natorp « les propositions[2] fondamentales du kantisme sont confirmées par la théorie nouvelle ». Mais entre le vague principe de relativité que formule Kant et les notions précises de la théorie de Lorentz (temps local, hypothèse de la contraction, etc.), il y a un abîme. Le raisonnement de Natorp est aussi contestable que celui par lequel on voudrait établir que la philosophie d'Aristote se trouve confirmée par les travaux d'Helmholtz, par les expériences de Mayer et de Joule, parce que le Stagirite a affirmé l'existence d'un substrat permanent sous le changement.

Formuler le principe métaphysique de substance ne comporte aucune difficulté, et n'a d'ailleurs aucune portée pratique ; démontrer le principe de conservation de l'énergie sous sa forme mathématique, ou la loi d'équivalence (cas particulier du principe de conservation) par la méthode expéri-

1. Natorp, *loc. cit.*, p. 403 : « ...also die Zeitstellen der Ereignisse nicht durch ihr Verhältnis zu einer etwa gegebenen absoluten Zeit bestimmt sein, sondern nur die Erscheinungen selbst sich ihre Steilen in der Zeit gegenseitig bestimmen können, indem ihre gesetzliche Ordnung sie erst bestimmbar macht. »

2. Natorp, *ibid.*, p. 403.

mentale a exigé des efforts considérables de la part des plus profonds esprits. L'exposé du principe de conservation, par exemple, sous la forme mathématique, exigeait l'élaboration des concepts d'énergie potentielle et d'énergie cinétique et demandait une analyse très précise. On sait, en effet, que le principe, considéré au point de vue de la démonstration mathématique, n'est pas vrai d'une façon générale; en nous bornant au cas où le système considéré n'est soumis qu'à des forces intérieures, les conditions restrictives s'expriment en disant que les forces intérieures doivent admettre une *fonction des forces*. Si elles n'admettent pas une fonction des forces, si par exemple les projections de la force X, Y, Z au lieu de dépendre uniquement des coordonnées du point d'application dépendaient de sa vitesse, il n'y aurait plus conservation de l'énergie[1]. Aussi, pour éviter toute hypothèse concernant les forces moléculaires, considère-t-on généralement le principe de l'équivalence comme un *principe expérimental*[2] démontré par les expériences de Mayer et de Joule. Dira-t-on que le mémoire de

1. X, Y, Z étant les projections de la force sur les axes. x, y, z les coordonnées du point d'application de cette force, soit

$$dT = Xdx + Ydy + Zdz$$

l'expression élémentaire du travail :

Si X, Y, Z ne dépendent que de x, y, z et si

$$Xdx + Ydy + Zdz = d.U(x, y, z) = \text{différentielle exacte}$$

alors la fonction $U(x, y, z)$ est une fonction des forces.

2. Poincaré, *Thermodynamique*, p. 63, 1re édition.

Helmholtz sur la conservation de l'énergie, les expériences de Mayer et de Joule, etc., étaient contenus dans l'aphorisme d'Aristote? Or le raisonnement de Natorp concernant le principe de relativité et l'électrodynamique, dans leurs rapports avec la philosophie de Kant, se réduit à peu près à une affirmation de ce genre.

D'ailleurs Natorp, en ce qui touche la théorie de Lorentz, ne pénètre pas dans le vif du sujet : il n'aborde pas l'examen du principe de relativité dans ses rapports avec l'électrodynamique. Nous n'examinerons pas non plus une question qui, touchant aux principes de la physique expérimentale et de la physique mathématique, sort du cadre de notre étude.

En résumé, ce qui distingue les travaux de la critique scientifique sur les principes des travaux des métaphysiciens sur le même objet, c'est que chez les seconds, aux questions de méthodologie proprement dite auxquelles se borne la première, se rattachent toujours des problèmes concernant la théorie de la connaissance, et des problèmes plus spécialement métaphysiques qui ne comportent, les uns et les autres que des solutions indémontrables. Quant aux théories scientifiques proprement dites, elles n'ont, dans les philosophies métaphysiques, qu'une valeur métaphorique; ce sont des images qui illustrent des doctrines subjectives. Confondre les problèmes de la critique scientifique avec

ceux de la théorie de la connaissance, ne peut qu'être funeste à la première; les questions purement méthodologiques seront forcément traitées de façon défectueuse parce que les préférences philosophiques, les tendances individuelles qu'exprime la métaphysique des systèmes troubleront l'esprit du critique et influenceront les décisions de celui qui devrait déterminer des principes, contrôler et juger des théories.

Celui qui veut aborder utilement les problèmes de la critique des sciences, devra donc d'abord s'évader des systèmes métaphysiques; il devra aussi posséder une solide culture scientifique — qui, pour être sérieuse, sera forcément spéciale. A ce prix, seulement, il jugera les théories scientifiques, non du dehors, mais du dedans.

Le rôle de la philosophie à système, de la philosophie dans le sens classique, nous paraît terminé dans le domaine de la critique des sciences, non pas, bien entendu, qu'elle n'ait eu autrefois un intérêt considérable; mais son œuvre est l'œuvre du passé, et vouloir la ressusciter aujourd'hui serait tenter un effort stérile.

Dans les travaux de critique scientifique de Hilbert, de Peano, etc., que nous avons cités, les auteurs se sont toujours placés à un point de vue que l'on pourrait appeler « statique », en ce sens que les notions et les théories y sont considérées à un moment de leur évolution. Il reste, par suite,

une lacune à combler, comme nous l'avons déjà fait pressentir; c'est de montrer comment ces notions et ces théories se sont progressivement formées au cours des âges.

Il ne s'agit pas d'une histoire conçue comme une chronologie fastidieuse, comme un répertoire où l'on met un nom et une date sur chaque découverte, méthode qui donne à l'histoire des mathématiques l'aspect d'un annuaire des téléphones; mais d'une histoire envisagée comme la genèse même des théories scientifiques où la filiation des idées fondamentales serait établie. Mach, dans sa *Mécanique* nous a donné un modèle de ce que devrait être une histoire ainsi conçue. Cependant nous lui reprocherions d'attacher plus d'importance qu'elle ne le mérite à la métaphysique empiriste.

Nous ne soutiendrons, quant à nous, aucune thèse philosophique. « Ce ne sont pas les choses (les objets, les corps) nous dit Mach, mais bien les couleurs, les tons, les pressions..... (ce que nous appelons d'habitude des sensations) qui sont les véritables éléments du monde [1]. »

Mais pour nous faire connaître les « véritables éléments du monde », ne doit-on pas dépasser le point de vue de la science? Et n'y a-t-il pas une contradiction flagrante entre la phrase que nous

1. Mach, *La Mécanique*, trad. Bertrand, p. 451.
2. Mach, *ibid.*, p. 1.

venons de citer et le texte de la préface de l'ouvrage de Mach : « On trouvera dans cet ouvrage un travail d'explication critique animé d'un esprit antimétaphysique »? Car pour être empiriste, la thèse de Mach n'en dépasse pas moins le point de vue de la science et de la critique, puisque sans preuves mathématiques ou expérimentales, il croit pouvoir nous faire connaître les éléments derniers de l'univers; — on pourrait évidemment, avec autant de vraisemblance, et sans plus de preuves, retourner sa proposition fondamentale. Nous nous placerons à un point de vue plus prudent. Nous nous bornerons à montrer comment, à partir d'un moment de son évolution, la science s'est développée jusqu'à un autre moment; nous verrons ainsi comment les théories scientifiques s'accroissent et se transforment. Nous ferons ce travail sans idée préconçue : le critique comme l'historien ne doit pas être l'avocat d'une doctrine, car il risque, dans ce cas, sinon d'altérer les faits, du moins de ne retenir que ceux qui sont favorables à sa cause. C'est pourquoi on se défiera avec raison de l'auteur qui fera servir l'histoire des sciences à la glorification de quelque vieille machine de guerre métaphysique : philosophie d'Aristote, ou psychologie intuitioniste. Le travail de critique dont nous parlons n'a pas, d'ailleurs, qu'un intérêt purement philosophique, il peut être pour la science même de grande utilité.

L'enseignement des mathématiques, — car c'est de mathématiques qu'il s'agira, — est lié, en un sens, à une certaine conception philosophique : l'utilitariste remplira les programmes de mécanique appliquée, le rationaliste y introduira dans une beaucoup plus grande proportion des mathématiques pures ; le logicien voudra des démonstrations impeccables, l'intuitif préférera les méthodes les plus directes. De quel côté est la vérité ? On semble aujourd'hui vouloir donner à l'enseignement des sciences un caractère de plus en plus utilitaire, mais l'histoire nous apprend que les plus grands progrès ont été dus à une recherche théorique purement désintéressée et sans profit immédiat. Une critique historique impartiale poursuivie jusqu'à l'époque la plus récente, en rattachant le présent au passé, en mettant en évidence les théories fondamentales, et en indiquant les raisons de leur importance, peut jouer un rôle d'arbitre et nous mettre en garde contre les caprices de la mode qui existe aussi dans la science.

La critique philosophique peut avoir encore un autre intérêt. En cherchant à mettre en évidence les idées fondamentales que l'on rencontre dans les théories les plus récentes, elle peut contribuer à ce travail d'*élémentarisation* des notions qui est nécessaire aux progrès de la science. Une simplification s'impose continuellement et parallèlement au travail d'accroissement. Un des principaux

moyens de simplification consiste dans le *renversement* de l'ordre historique : la notion la plus profonde découverte la dernière est posée comme principe élémentaire, et après avoir été un point d'arrivée, elle devient un point de départ. Pour prendre l'exemple le plus simple, la notion de dérivée, réservée longtemps aux mathématiques supérieures comme appartenant à l'analyse infinitésimale, a été introduite depuis quelques années dans l'enseignement élémentaire, et loin de rendre cet enseignement plus difficile, elle a permis de résoudre les problèmes de maxima et de minima bien plus facilement qu'on ne le faisait par les méthodes dites élémentaires. On pourrait peut-être de même introduire les éléments de la théorie de Galois dans l'enseignement de la théorie des équations.

Avant d'appliquer la méthode que nous venons de caractériser, à quelques exemples, nous allons examiner une théorie qui, tout en ayant un intérêt réel, mais restreint, prétend s'imposer comme la doctrine mathématique fondamentale, sorte de « spécieuse » des principes d'où toutes les doctrines particulières de la mathématique seraient déduites. L'examen de cette doctrine fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

LA MÉTHODE LOGISTIQUE

Il semble qu'il serait encore prématuré de vouloir prononcer un jugement définitif sur les résultats obtenus par la logistique, d'essayer, en quelque sorte, d'établir, dès maintenant, son bilan scientifique. Bien des questions, d'ailleurs, qui ressortissent à la doctrine logistique ne sont pas encore tranchées. Cependant, il n'est peut-être pas sans intérêt de résumer certains points des discussions qui se sont élevées récemment à ce sujet entre les mathématiciens et les logiciens, et d'essayer d'en dégager quelques conclusions.

Ces controverses ont eu un point de départ métaphysique. Il s'est agi d'abord de savoir quelle était la part de l'intuition, et quelle était la part de la logique dans le raisonnement mathématique. Chez Kant « l'Anschauung » (intuition) est un mode de penser qui participe de la sensibilité, et la détermination de la nature de cette intuition a, dans sa philosophie, une importance capitale, parce que l'analyse des éléments de la connais-

sance est essentielle dans son système. Mais, la recherche qui a pour but de fixer les caractères précis de l'intuition et ses rapports avec la pensée en général, constitue une spéculation transcendante, qui ne pouvait être le véritable objet du débat, la thèse de la métaphysique intuitioniste n'étant pas plus susceptible de preuves que la thèse de la métaphysique intellectualiste des logisticiens. Les argumentations du plus savant mathématicien, en ces matières, n'ont pas une plus grande valeur que le discours du plus médiocre philosophe, précisément parce que le mathématicien a cessé de penser en géomètre, pour penser en métaphysicien. Le problème posé en termes scolastiques ne comporte pas de solution.

Cependant, ce qui a paru constituer l'intérêt de ce débat philosophique, c'est que l'existence d'une théorie scientifique, ou du moins d'une doctrine qui se présente avec un caractère positif, semblait liée à sa solution. Si l'intuitionisme est la vraie doctrine, les œuvres de Boole, de Schröder, de Frege, de Peano, de Whitehead, de Russell, doivent disparaître ; mais si l'intellectualisme logique exprime la véritable philosophie, les travaux des logisticiens se trouvent justifiés. Eh bien, nous estimons qu'il n'y a aucune solidarité entre la controverse métaphysique à laquelle nous venons de faire allusion, et la question de savoir si cette science spéciale, qui s'appelle la logistique, est ou

n'est pas bien fondée : l'existence de la logistique ne dépend pas plus des controverses sur la nature de l'esprit, que la légitimité de la physique expérimentale n'est liée aux discussions sur l'essence intime de la matière. Sans doute, certains logisticiens ont donné à leur propre science une portée excessive, et l'ont, dans un certain sens, transformée en une scolastique ; cette extension métascientifique d'une doctrine positive est illégitime et soulève des difficultés insolubles. Mais il y a, croyons-nous, une conception scientifique et restreinte de la logistique, qui demeure à l'abri des fluctuations de la pensée philosophique : nous essaierons d'établir cette thèse tout à l'heure. Avant d'aborder ce point essentiel, rappelons que la constitution d'une logistique est conforme au sens de l'évolution des sciences, et sans entrer dans beaucoup de détails historiques, quelques brèves indications nous permettront de justifier cette affirmation.

On sait que les travaux de Cauchy et d'Abel ont déterminé le développement de l'analyse au XIXe siècle, et que la précision logique et la rigueur des démonstrations caractérisent l'œuvre de ces grands géomètres. En 1826, Abel écrit à Hansteen : « Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière dans l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'analyse... Dans l'analyse supérieure, bien peu de propositions sont démontrées

avec une rigueur définitive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général [1]... » Ce besoin de démonstration rigoureuse répondait à des exigences logiques, à la nécessité de réduire le plus possible les « à peu près » de l'imagination des inventeurs. Cauchy et Abel ont contribué considérablement à faire accepter le principe, incontestable aujourd'hui, qu'une proposition ne saurait être admise en mathématiques, que si elle a été démontrée en toute rigueur. Mais les géomètres du XVIII^e siècle, moins exigeants que les mathématiciens modernes, se contentaient de méthodes dont l'exactitude laissait beaucoup à désirer, s'en rapportant le plus souvent à leur intuition [2]. Qu'il nous suffise de rappeler que les anciens analystes, lorsqu'ils se trouvaient en présence d'équations qui ne s'intègrent pas par des quadratures, employaient des développements en séries, mais, ils ne se préoccupaient pas de savoir si ces développements étaient convergents ; aussi Cauchy a-t-il pu dire avec raison : « L'intégration par séries était donc illusoire tant qu'on ne fournissait aucun moyen de s'assurer que les séries obtenues étaient convergentes, et que leurs sommes étaient des fonctions propres à

1. Abel, *Œuvres*, édition Sylow et Lie, II, 263.

2. Nous attribuons au mot intuition son sens vulgaire. L'intuition est un rapprochement fait par l'imagination, rapprochement non contrôlé par des critères logiques.

vérifier les équations proposées [1]. » La série d'Euler

$$1 - 1 + 1 - \ldots\ldots$$

dont les anciens mathématiciens se faisaient une conception erronée, pourrait nous fournir un autre exemple de l'imprécision de leurs méthodes. Les géomètres du XVIIIe siècle employaient les séries divergentes, parce qu'elles réussissaient empiriquement, sans se préoccuper des difficultés logiques qu'elles pouvaient soulever.

Ce que nous venons de faire remarquer au sujet de la convergence des intégrales des équations différentielles et des séries divergentes, serait également exact en ce qui concerne bien d'autres branches des mathématiques. Rappelons, encore, à ce propos, les transformations de la définition de l'intégrale. Les analystes, depuis Cauchy et Dirichlet, se sont efforcés de substituer à la notion confuse de l'intégrale considérée comme une aire, une définition analytique rigoureuse. Les travaux de Riemann ont contribué à éclaircir ce sujet, et à notre époque il faut signaler les résultats obtenus par M. Lebesgue. Ici encore, à l'intuition vague, on substitue des définitions analytiques exactes. On peut donc dire, en restant dans la vérité historique, que l'analyse du XVIIIe siècle était beaucoup moins rigoureuse que celle du XIXe siècle, et à moins de

1. Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique*, I, 327.

soutenir que les travaux du XIX^e siècle marquent un recul sur ceux du XVIII^e, il faut bien reconnaître, que l'ensemble de l'évolution de la science mathématique indique un progrès dans le sens d'une plus grande précision logique.

L'affirmation de M. P. Boutroux « qu'il est souvent avantageux de substituer, dans la théorie des fonctions, à l'étude d'un développement, celle de caractères moins précis et plus *intuitifs* [1] », doit être entendue en ce sens, qu'il est commode, pour la recherche, d'employer des méthodes moins rigoureuses ; mais il est incontestable que les résultats obtenus devront, avant d'être incorporés définitivement à la science, être contrôlés par les méthodes les plus précises. Assigner un autre sens à cette affirmation serait donner un démenti à tout le développement des mathématiques modernes.

Du moment que le progrès des méthodes mathématiques consiste à faire à la rigueur et à la précision logiques une part de plus en plus grande, on devait nécessairement être amené à scruter les bases mêmes des raisonnements des géomètres, à analyser les types fondamentaux des démonstrations, et à fixer les éléments indéfinissables sur lesquels ces démonstrations reposent. Mais, si le développement historique des mathématiques paraît bien prouver qu'*en droit* au moins la logistique

1. P. Boutroux, *Thèse sur quelques propriétés des fonctions entières*, p. 1.

est légitime, dans quelle mesure peut-on dire que la réduction logique des raisonnements mathématiques est achevée *en fait?* Les idées primitives et les propositions indémontrables caractérisées par M. Russell constituent-elles toute la trame logique des mathématiques? Ce sont là des questions à examiner en détail. Il semble certain qu'il y a des problèmes que M. Russell a résolus, d'autres qu'il n'a pas résolus, et qu'il ne serait guère raisonnable de lui demander d'édifier, à lui tout seul, toute la logistique. Constatons, d'ailleurs, que M. Russell semble s'être fait illusion sur la portée de la logistique lorsqu'il a écrit que « the fact that all mathematics is symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age[1] ». Mais il paraît bien qu'il restitue lui-même à la logistique sa véritable portée, lorsqu'il voit en elle une sorte de spécialité[2], une branche des mathématiques, ignorée en fait de la plupart des mathématiciens, et non l'instrument indispensable de toute recherche mathématique. Quelles sont les frontières précises de cette branche nouvelle des mathématiques? Quelle est sa tâche positive, et quels sont ses rapports avec les grandes théories mathématiques, et notamment avec la théorie des fonctions? Telles sont les questions qu'il faudrait résoudre. Mais ce sont là

1. Russell, *Principles of Mathematics*, p. 5.

2. Russell, apud *Revue de métaphysique et de morale*, sept. 1906, p. 628.

des problèmes considérables et que nous n'avons pas la prétention de trancher dans les pages qui vont suivre. Nous nous contenterons, encore une fois, de mettre en relief certains points.

I

LE CHAMP D'APPLICATION DE LA LOGISTIQUE

Nous voudrions, d'abord, essayer de donner quelques indications sur la détermination des limites du domaine de la Logistique. La Logistique doit avoir des bornes dans le sens de l'abstraction métaphysique (une limite supérieure, si l'on peut dire), ce qui signifie qu'elle doit, par un postulat explicitement formulé, couper court à toutes digressions dans le domaine stérile de la scolastique. Elle doit aussi avoir des frontières dans le sens de ses applications (limite inférieure) ou, si l'on veut, de son extension au domaine des sciences positives, afin d'éviter tout double emploi avec les méthodes déjà existantes. Nous prendrons comme point de départ la définition que M. Whitehead donne d'un calcul en général. Un calcul sera défini comme « the art of manipulation of substitutive signs according to fixed rules, and of the deduction therefrom of true propositions[1] ». Un calcul, dans ce sens encore très vague, peut s'appliquer

1. Whitehead, *Universal Algebra*. p. 4.

à deux sortes d'êtres mathématiques : les êtres mathématiques *non-numériques* et les êtres mathématiques *numériques*. Ces deux espèces d'êtres se distinguent en ce que les premiers vérifient les lois suivantes :

$$a = aa$$
$$a = a + a$$
$$a + ab = a$$

tandis que les seconds satisfont aux règles connues :

$$aa = a^2$$
$$a + a = 2a$$

(nous ne donnons ces règles que pour mieux préciser notre pensée, nous ne voulons pas dire que les lois élémentaires des opérations de l'arithmétique ordinaire peuvent s'appliquer à tous les êtres mathématiques numériques)[1].

Le champ du calcul, comprenant à la fois les êtres numériques et non-numériques, enferme toutes les formes possibles de la pensée ; la logistique sera donc, dans ce sens général, un calcul.

Mais, à propos du calcul, se pose précisément la question philosophique préalable : quel est le rapport de la réalité avec les règles et les symboles substitutifs ? Nous pensons, pour notre part, qu'un problème posé dans des termes aussi généraux n'a pas de sens scientifique, et que, partant, chaque

1. On sait, par exemple, que les quaternions de Hamilton ne vérifient pas la loi commutative de la multiplication.

fois que des problèmes de cet ordre seront énoncés, il suffira de les écarter. Nous coupons court ainsi à toutes divagations dans le champ de la scolastique et aux questions qui ne comportent pas de réponse précise comme celle-ci : quelle est la valeur du symbolisme ? Nous ne nous serions même pas arrêté un seul instant sur ce point, si M. Couturat, qui fait autorité dans les questions de Logique, n'avait affirmé que la philosophie spéculative comprend, « outre la Méthodologie des Sciences, l'Épistémologie ou critique des principes des Sciences, la théorie générale de la connaissance, et enfin la Métaphysique comme science de l'être au moins en tant que connu et connaissable, et conçu dans ses rapports avec l'esprit[1] » Or, si la Méthodologie et l'Épistémologie des sciences sont légitimes, l'affirmation du bien fondé d'une théorie de la connaissance et d'une Métaphysique nous paraît erronée. Nous étant déjà expliqué sur ce point, nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps[2].

Il nous reste à fixer la limite inférieure du champ d'application de la Logistique, tâche infiniment plus délicate car il ne semble pas que l'on puisse encore dégager des résultats définitifs des controverses engagées à ce sujet. Le problème se pose dans les termes généraux suivants : en dehors

1. Couturat, apud *Revue de métaphysique et de morale*, mai 1906, p. 340.

2. Voir chapitre I.

d'un certain domaine qui lui est propre, que M. Hadamard définit comme celui de l'analyse des raisonnements mathématiques[1], et que nous essaierons de déterminer un peu plus explicitement tout à l'heure, la Logistique peut-elle s'étendre, comme une nouvelle méthode générale, aux différentes parties de la mathématique? Y a-t-il un moment où le logisticien doit, s'il est permis d'employer une expression vulgaire, passer la main au mathématicien, ou bien, peuvent-ils tous deux voyager de conserve, et la logistique *double*-t-elle, dans toutes ses parties, la mathématique? M. Peano, s'il n'a pas adopté complètement la seconde alternative, semble du moins considérer la logistique comme une algèbre nouvelle. « Il l'emploie, dit M. J. Richard, *comme on emploie l'algèbre* pour écrire des propositions, et les déduire les unes des autres d'après des règles fixes. Il n'a jamais eu, je pourrais le prouver par des citations nombreuses, l'idée de suppléer par cette algèbre aux notions premières de la science, celle du nombre, par exemple[2]. » Mais précisément cette manière de concevoir la Logistique n'implique-t-elle pas une extension illégitime de son champ d'application? L'argument qui consiste à dire que le *Formulaire* existe[3], c'est-à-

1. Hadamard, *Revue générale des Sciences*, 30 octobre 1906, p. 909.
2. J. Richard, *Ibid.*, 30 novembre 1906, p. 957.
3. Couturat, *Revue de métaphysique et de morale*, mars 1906, p. 220.

dire qu'il est imprimé, n'a pas une grande valeur. Le raisonnement qui met en demeure les adversaires de la Logistique, de trouver des erreurs de démonstration dans le *Formulaire* [1], est certainement plus sérieux, mais il n'écarte pas l'objection principale. Si, comme on le lui reproche, la Logistique n'est, lorsqu'elle reprend le travail même du mathématicien, qu'une *traduction* avec d'autres signes, du raisonnement mathématique ordinaire, il est bien certain qu'elle ne pourra commettre d'erreurs que s'il s'en trouve dans le raisonnement original ; ce qu'on reproche à la Logistique dans ce cas, ce n'est pas sa fausseté, mais son *inutilité*, une méthode ayant justifié son existence, soit lorsqu'elle permet de résoudre des problèmes non résolus par d'autres procédés, soit lorsqu'elle a sur les méthodes existantes des avantages de précision et de rapidité. Or la méthode logistique n'a pas permis de solutionner des problèmes proprement mathématiques non résolus avant son apparition ; elle ne saurait non plus prétendre à la rapidité. Il reste donc à voir si dans le domaine mathématique proprement dit, et non plus seulement dans le domaine des principes des mathématiques, elle possède des qualités d'exactitude que n'ont pas les méthodes classiques, en formulant, d'une manière explicite, tous les postulats dont on se sert inconsciemment d'ordinaire.

1. *Ibid.*, p. 221.

En fait, remarquent les logisticiens, si le mathématicien ne se trompe pas, c'est qu'il est guidé par une logique inconsciente. Examinons donc sur le plus élémentaire des exemples, sur l'addition arithmétique des nombres entiers, s'il y a place pour une intervention de la Logistique, dans le domaine proprement scientifique. Laissons de côté les questions sur les principes (définition du nombre, etc.), puisque à notre point de vue, elles sont du ressort de la Logistique.

L'opération $+$ sera caractérisée, comme dans tous les traités d'arithmétique, comme une opération primitive ayant les quatre propriétés :

1° D'être associative ;

2° D'être commutative ;

3° D'avoir zéro pour module ;

4° D'être telle que si à un nombre a, on ajoute des nombres différant entre eux, on obtient encore des nombres différant entre eux.

Ces propriétés, tout le monde le sait, ont été formulées longtemps avant l'existence de la Logistique. Supposons que le système de numération ait été déterminé, ainsi que les règles pour l'écriture des nombres dans le système choisi (nous renvoyons pour le détail de ces règles aux traités d'arithmétique), et que, finalement, il s'agisse d'additionner $5 + 7 + (3 + 4) = 19$. Les règles établies par l'arithmétique sont-elles suffisantes pour éviter toute erreur ? Les erreurs sont-elles évitées

en vertu d'une logique inconsciente, ou en vertu des règles de l'arithmétique? En un mot l'arithmétique elle-même ne fait-elle pas fonction de logique? Et toute erreur dans les calculs d'addition n'est-elle pas impossible du moment que l'on applique correctement les règles de l'arithmétique? L'emploi d'un calcul logique pour contrôler la justesse de l'opération n'est-il pas surérogatoire?

Nous ne pensons pas qu'il puisse y avoir de doute à ce sujet. Si l'on considère notre exemple comme trop simple, on peut se poser la même question pour le calcul trigonométrique. On peut, tout d'abord, introduire les fonctions trigonométriques sin x et cos x selon la méthode indiquée par J. Tannery de manière à réduire le plus possible les données expérimentales : « On établit encore par des considérations géométriques les formules :

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{cases}$$

Je vais montrer (en supposant toutefois leur existence) comment on peut déterminer toutes les fonctions continues $\varphi(x)$, $\psi(x)$ qui jouissent des propriétés définies par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)\,\varphi(b) - \psi(a)\,\psi(b) \\ \psi(a+b) = \psi(a)\,\varphi(b) + \psi(b)\,\varphi(a) \end{cases}$$

et satisfont en outre à une autre condition... En désignant par cos x et sin x des fonctions dont on sait qu'elles sont continues et qu'elles doivent satis-

faire aux équations (1)... on devra à cause de la relation [1]

$$\varphi^2(x) + \psi^2(x) = e^{gx} \quad \text{(que l'on a établie)}$$

avoir la relation

$$(3) \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \text{ »}\ (^2)$$

Les fonctions sin x et cos x sont déterminées par les formules (1) et (3). Considérant les fonctions sin x et cos x comme données par leurs développements en séries, on peut montrer comment ces fonctions satisfont effectivement aux conditions dont on est parti. Sans reprendre les démonstrations dans tous leurs détails, on voit qu'il y a là un point de départ, pour établir, d'une manière rigoureuse, les formules de la trigonométrie élémentaire [3]. En appliquant exactement les règles ainsi obtenues, on peut être assuré de ne jamais commettre de fautes dans un calcul trigonométrique particulier. Ce ne sera pas la logique inconsciente, mais l'application littérale des formules qui nous aura permis d'éviter les erreurs. Mais comme, d'ailleurs, tous les raisonnements de l'algèbre, de

1. On a posé :

$$\cos x = \varphi(x)\, e^{-\frac{g}{2}x},$$

$$\sin x = \psi(x)\, e^{-\frac{g}{2}x},$$

etc.

2. J. Tannery, *Introduction à l'étude des fonctions d'une variable*, 1^{re} édition, p. 146.

3. *Ibid.*, p. 157.

l'analyse et de la géométrie sont aussi rigoureux que ceux dont nous venons de parler, et qu'ils s'obtiennent tous au moyen des règles classiques du calcul, on ne voit pas bien le rôle utile que la logistique peut jouer à l'intérieur du domaine particulier de ces différentes sciences.

Peut-être que M. Peano et ses collaborateurs ont eu l'impression qu'en se bornant à la détermination des principes grammatico-logiques des mathématiques, la logistique n'aurait plus constitué qu'une spécialité limitée ; et comme l'idée d'une méthode générale nouvelle hantait probablement leurs esprits, ils ont introduit dans le *Formulaire* nombre de pages qui ne devraient pas, strictement parlant, y figurer. Nous citerons, à titre d'exemple, entre beaucoup d'autres que nous pourrions signaler, les pages 35, 40 et 41 du tome V du *Formulario matematico*.

A la page 35 nous voyons écrits, sous *la forme ordinaire*, les développements des premières puissances du binôme $(a+b)$, du trinôme $(a+b+c)$ et des expressions algébriques telles que :

$$(a+b)^4 + a^4 + b^4 = 2\,(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Toutes ces expressions figureraient aussi bien dans un traité d'algèbre ordinaire et nous ne voyons aucun perfectionnement de méthode sauf qu'au début du paragraphe 2 se trouve l'expression :

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 . \supset .$$

et au début du paragraphe 3 l'expression analogue :

$$a, b, c \varepsilon N_0 . \supset.$$

Ce qui veut dire que, dans les propositions suivantes, a, b, c, doivent être considérés comme des nombres : nous nous en étions bien un peu doutés.

Les pages 40 et 41 concernent des inégalités comme :

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Ici encore toutes les expressions pourraient figurer dans n'importe quel manuel d'exercices algébriques. Ce qui distingue l'exposition du *Formulaire* de celle d'un traité ordinaire d'algèbre, c'est qu'au début des paragraphes, on trouve l'expression :

$$a, b \varepsilon N_1 . a - = b . \supset .$$

Si nous remarquons que $a - = b$ peut, au point de vue algébrique, s'écrire $a \neq b$, la formule signifie qu'il s'agit de nombres naturels. On n'aperçoit pas, d'une manière générale, ce que le calcul algébrique pratique doit gagner à ces remarques évidentes. A partir du moment où commence le calcul algébrique proprement dit, *les règles de ce calcul sont devenues les règles logiques*, et il n'y a rien à chercher en dehors d'elles. Nous voyons donc que les auteurs du *formulaire* ont, sur certains points, empiété sur le domaine de la mathématique proprement dite, et relativement à ces points, leurs théories faisant double emploi avec les méthodes existantes, doivent être rejetées comme inutiles.

Mais il existe une branche d'études spéciales qui constituent l'objet exclusif du travail des logiciens. En effet, il faut, pour enseigner les premiers éléments du calcul, employer des phrases; il serait, évidemment, impossible d'exposer les principes élémentaires des mathématiques sans un discours grammatical préalable : « L'étude de la grammaire, écrit M. Russell, est à mon avis, capable de jeter beaucoup plus de lumière sur les questions philosophiques que les philosophes ne le supposent généralement[1]. » C'est ainsi que l'on rencontre les signes $\supset$, $\cap$, ε... etc., c'est-à-dire l'implication, la conjonction et, l'appartenance à une classe, etc. Ces signes sont substitutifs d'idées fondamentales. Comment caractériser ces idées ? Combien en emploiera-t-on ? et comment ces idées se rattachent-elles au mathématisme proprement dit ? Ce sont des questions auxquelles on doit répondre et qu'il faut traiter avec la même précision que les mathématiques mêmes, si l'on veut éviter que le point de départ de l'arithmétique, de l'analyse et des autres branches des mathématiques ne soit noyé dans un brouillard.

M. Russell a déjà considérablement éclairci ces questions dans le chapitre V des *Principles of mathematics* qui est consacré au « denoting », où est mis en évidence le rôle des vocables all (tout),

1. Russell, *Principles of Mathematics*, p. 42.

every (chaque), any (un quelconque), a (un, pronom indéfini), some (quelque), the (le)[1]. Comme nous ne pouvons imaginer ce que serait un esprit dont toutes les notions grammatico-logiques seraient bannies, le principe même de toute philosophie positive nous oblige d'étudier ces notions comme des faits donnés, d'établir les lois des combinaisons qui leur sont propres, ainsi que les rapports qui les unissent à la science mathématique proprement dite. Tel est le champ positif d'application de la logistique, champ qui constitue l'Introduction logique à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions.

En accordant à M. Hadamard[2], que le problème qui consiste à vouloir réduire absolument les notions arithmétiques aux notions grammatico-logiques, ou inversement, constitue un problème métaphysique sans solution possible, il resterait toujours à établir des correspondances positives et précises entre les notions des deux ordres. En admettant même, ce qui est faux, qu'Aristote ait formulé pour l'éternité les lois de la logique, sans qu'il soit permis de rien ajouter, ni de rien retrancher à ses formules — thèse de M. Poincaré, que l'illustre mathématicien détruit lui-même en reconnaissant

1. Depuis a paru un article de M. Russell dans *The Mind* (oct. 05) sur la question du denoting.

2. Hadamard, *Revue generale des Sciences*, 30 octobre 1906, p. 908.

que la notion de fonction propositionnelle constitue une *invention heureuse*[1], — il resterait toujours à fixer les correspondances de la syllogistique et des notions grammaticales avec le calcul mathématique. Par exemple, M. Whitehead a parfaitement montré la portée et le sens de la syllogistique en l'exposant sous la forme symbolique; elle devient un cas particulier des méthodes générales d'élimination : « It is evident that each syllogism is simply a problem of elimination of the middle term[2]. »

La détermination précise des éléments grammatico-logiques, qui interviennent dans les mathématiques, répond, en un sens, à ce besoin de rigueur qui poussait Abel à reprendre les démonstrations des théorèmes de la haute Analyse qu'il jugeait insuffisantes. Mais ce travail peut avoir aussi un autre effet, celui de perfectionner l'instrument de la logique non numérique, et de rationaliser les formes grammaticales en les confrontant avec les formes mathématiques.

L'analyse des raisonnements mathématiques, c'est-à-dire la détermination des types logiques auxquels ils se rattachent, constitue donc bien le domaine propre de la logistique. Il faut admettre que la détermination de la nature et de la portée

1. Poincaré, *Revue de métaphysique et de morale*, novembre 1905, p. 827.
2. Whitehead, *Universal algebra*, p. 103.

du principe de l'induction complète, par exemple, doit être traitée logistiquement, et que toute autre manière d'aborder ce problème ne saurait être scientifique. M. Poincaré a posé, en termes métaphysiques, le problème suivant : Comment à l'aide d'une méthode analytique (conçue comme fondée uniquement sur le principe d'identité) peut-on découvrir des vérités *nouvelles* [1] ? M. Poincaré a trouvé la solution de la question dans le principe d'induction complète. Et alors, le principe d'induction complète, qui résout un problème philosophique, sera promu, par cela même, à la dignité de méthode-type pour les mathématiques: Mais il se peut que le problème métaphysique primitivement posé ne soit pas légitime, du moins scientifiquement parlant. D'abord est-il vrai que la méthode analytique se réduise à l'application du principe d'identité ? M. Couturat a réfuté cette conception purement tautologique de la méthode analytique. Mais, de plus, la *nouveauté* de la découverte dont M. Poincaré veut rendre compte, constitue-t-elle une manifestation psychologique relative à l'homme, ou répond-elle objectivement à quelque chose ? Quand nous découvrons les lois de la nature, cela signifie qu'elles sont nouvelles *pour nous*, comme l'Amérique était nouvelle aux yeux de Christophe Colomb.

1. Poincaré, *La Science et l'hypothèse*, p. 10.

malgré l'existence tant de fois séculaire du continent américain. Et n'y a-t-il pas une contradiction manifeste à vouloir donner un fondement logique absolu à ce qui n'est que psychologique et humain? Sans nous avancer plus avant dans le dédale scolastique, ces remarques suffisent à montrer que les termes du problème étaient mal déterminés : toute solution en sera donc contestable. Or, c'est parce que l'induction complète résolvait un problème d'ordre métaphysique dans l'esprit de M. Poincaré, qu'il lui a attribué une valeur universelle qu'elle ne saurait avoir. Depuis, M. Poincaré a atténué ce que sa conception primitive pouvait avoir de trop absolu : « J'y voyais le raisonnement mathématique *par excellence*. Je ne voulais pas dire, comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire à une application de ce principe[1]. » Mais est-il bien sûr que ce soit le raisonnement mathématique par excellence? Les adversaires de M. Poincaré, les logisticiens, ne sont pas partis d'un problème philosophique général, et il faut reconnaître que leur point de départ, au moins, est conforme à la méthode positive : ils ont étudié successivement toutes les formes du raisonnement mathématique, et, analysant les notions logiques premières, ils ont rencontré le principe de l'induction complète

1. Poincaré, *Revue de métaphysique et de morale*, novembre 1905, p. 818

dans la théorie des nombres *finis*[1]; il semble qu'ils aient parfaitement reconnu le rôle de ce principe, en le considérant comme un élément fondamental de la définition de ces nombres. Maintenant, existe-t-il d'autres formes de démonstration étrangères au principe d'induction (comme par exemple dans le syllogisme $a = b$, $b = c$, donc $a = c$) et qui ne soient, en aucune façon, des applications de ce principe? Sur ce point la logistique a déterminé un certain nombre de types de raisonnements (principe de composition, de simplification, de contraposition, d'exportation, d'importation, de déduction, de substitution, principes de la logique des relations...), dont il faudrait montrer l'inanité, avant d'affirmer la suprématie du principe de l'induction complète. D'ailleurs, il est évident que, si l'on donne le nom d'induction complète à la faculté qu'a l'esprit humain de former des jugements généraux, valables pour une infinité de cas, un tel principe intervient dans tout acte de la pensée. Mais cette dénomination n'a rien de légitime. Quant à la méthode par induction complète, au sens strict, il semble bien qu'il ne faille l'employer que dans le domaine qui lui est propre (théorie des nombres finis), et dans les cas qui se rapportent plus ou moins directement à ce domaine. Il paraît donc que sur la

1. Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 62. (F. Alcan).

question du principe de l'induction complète, les logisticiens doivent finalement l'emporter, le problème posé étant bien de leur compétence, puisqu'il s'agit d'analyser logiquement un raisonnement mathématique.

En résumé, quoi que l'on dise, et quels que soient les sarcasmes dont on accable la logistique, il y a là un domaine positif d'études, un ensemble de questions auxquelles il faut répondre. Mais, si l'on ne peut ignorer cette branche de la science, il y aurait une erreur aussi grande à s'imaginer que l'essentiel de la pensée mathématique a été absorbé dans les théories générales de la logistique, et à croire que toutes les autres branches des mathématiques se réduisent à une application automatique des règles posées dans l'introduction logique. Même en admettant, comme nous, le bien fondé de la logistique, mais en circonscrivant bien exactement son domaine, on doit reconnaître l'autonomie absolue de la pensée mathématique. Nous voulons dire que, même si les questions générales de la logique étaient résolues à la satisfaction de tous, la difficulté des problèmes réels que l'on rencontre dans les mathématiques pures, ou qui sont posés au calculateur par le physicien, n'en serait aucunement diminuée. Reprenant une parole célèbre, on pourrait dire : La logique est fondée, l'ère des difficultés scientifiques commence.

Dans les deux paragraphes qui vont suivre,

nous essaierons de montrer quelques exemples de problèmes, pour la solution desquels la logistique n'apporte aucune clarté et aucune aide ; nous déterminerons ainsi plus positivement ce que nous avons appelé sa limite inférieure.

II

LA DÉFINITION DU NOMBRE IRRATIONNEL ET LA GÉNÉRALISATION DU NOMBRE

Nous ne pouvons songer à examiner systématiquement toutes les théories de la logistique. Nous nous contenterons d'examiner quelques questions. Occupons-nous, tout d'abord, de la définition du nombre irrationnel, qui est exposée au chapitre XXXIV des *Principles of mathematics* de M. Russell. Résumons d'après M. Couturat les résultats auxquels aboutit M. Russell. « Sa définition consiste à identifier le nombre irrationnel à la *classe inférieure* qui servait précédemment à la définir... On appellera *segment* toute classe de nombres rationnels non nulle, qui ne comprend pas tous les nombres rationnels, qui comprend tous les nombres rationnels plus petits qu'un quelconque de ses éléments, et telle que chacun de ses éléments est plus petit qu'un autre de ses éléments[1]. » On

1. Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 85.

peut exprimer en symboles ces deux dernières conditions. On montre qu'il y a plus de segments que de nombres rationnels. « Ces segments seront, par définition, les nombres réels [1]. » Le nombre irrationnel a été identifié à la classe inférieure [2]. Le principe de cette définition est dû à Pasch, et il semble que le mérite principal de M. Russell ait été de rattacher cette conception à la théorie logistique. Mais cette dernière doctrine apporte-t-elle la moindre clarté dans les difficultés proprement mathématiques qui ressortissent à la théorie des nombres irrationnels? Aucunement, ainsi que nous allons le montrer immédiatement.

En quoi la définition précédente et les différentes théories logistiques concernant les nombres irrationnels ont-elles contribué à la résolution du problème suivant :

Un nombre étant défini par une suite infinie de nombres entiers, reconnaître si ce nombre est commensurable ou incommensurable [3] ? On sait, il est vrai, que si un nombre est défini par son développement en décimales, il faut et il suffit, pour que le nombre soit commensurable, que la série

1. Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 86.

2. On pourrait identifier aussi le nombre irrationnel à la classe supérieure.

3. Nous emploierons indifféremment les termes « incommensurable » et « irrationnel », qui sont également défectueux. En général, le terme « incommensurable » s'emploie pour les grandeurs.

soit périodique à partir d'un certain rang. On sait encore, que si le nombre est développé en fraction continue, il faut pour qu'il soit commensurable que le développement soit limité. Mais ces règles ne résolvent pas le problème général[1]. Ce n'est pas tout, la théorie logistique ne nous permet pas de reconnaître si un nombre incommensurable défini est algébrique ou transcendant, et dans le cas où il est algébrique de déterminer son degré.

En ce qui concerne notamment les nombres transcendants, leur existence n'est nullement évidente *a priori*, elle résulte en particulier d'un théorème de Liouville :

$\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible, valeur approchée du nombre ξ, si l'on a :

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$$

les valeurs de q dépassant toute limite, ξ ne peut pas être un nombre algébrique du degré n. Si nous pouvons faire cette démonstration pour chaque valeur de n, ξ est transcendant[2]. Ainsi l'existence de ξ exige une démonstration particulière. Ajoutons qu'en ce qui concerne les nombres algébriques, il existe un théorème de Lagrange qui permet de reconnaître lorsqu'ils sont du deuxième

1. E. Cahen, *Eléments de la théorie des nombres*, p. 172 et 183.
2. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26.

degré. Le lecteur, qui voudrait approfondir ces questions, trouvera des résultats importants, concernant ces problèmes, dans l'intéressant ouvrage de M. Maillet sur la théorie des nombres transcendants [1]. Nous signalons notamment le théorème qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une irrationnelle I, réelle positive, soit un nombre transcendant de Liouville [2]. Dans ces recherches il n'est jamais fait mention des formules de la logistique. En définitive, et c'est tout ce que nous voulons retenir des explications qui précèdent, la définition logistique de l'irrationnelle et les considérations que les logisticiens ont pu émettre à son sujet, mises en formules ou non, n'apportent aucune lumière sur la détermination des caractères distinctifs des nombres commensurables et des incommensurables, des incommensurables algébriques des différents degrés, et enfin des nombres transcendants. Les résultats, obtenus dans ces matières, l'ont été, en abordant directement les difficultés par les méthodes mathématiques classiques. Ajoutons qu'il reste dans ce domaine beaucoup à faire.

Il serait fastidieux d'énumérer tous les principaux problèmes non résolus par les méthodes ordinaires, et pour lesquels la logistique n'apporte

1. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, Gauthier-Villars, 1906.

2. *Ibid.*, p. 124.

aucun secours au mathématicien : faut-il, à titre d'exemple, citer le cas suivant qu'on trouve en analyse ? « On sait que deux fonctions, qui ont toujours la même dérivée, ne diffèrent que par une constante, lorsque cette dérivée est *finie* ; pour le cas général, on ne sait rien [1] », ou, dans un ordre d'idées tout différent, rappellerons-nous l'un des énoncés de Fermat, non résolu dans le cas général : l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'est pas résoluble en nombres entiers pour $n > 2$. Mais au lieu de passer en revue des problèmes spéciaux, il est préférable d'examiner une question d'un caractère plus général : la généralisation du nombre nous permettra de faire quelques remarques intéressantes. « La même méthode logique, écrit M. Couturat, permet d'expliquer la généralisation du nombre. Et d'abord, les nombres rationnels seront considérés comme des relations entre nombres entiers... De même, les nombres positifs et négatifs seront conçus comme des opérations sur les nombres absolus [2]... » L'élaboration de la théorie logique des nombres irrationnels est inséparable de la notion du continu, comme la théorie logique des nombres complexes implique la théorie de l'espace [3]. Tant qu'elle se borne à justifier et à organiser les nombres, ou, d'une

1. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 75.

2. Couturat, *Les principes des mathématiques*, p. 79.

3. *Ibid.*, p. 81.

manière plus générale, les êtres mathématiques que la science positive a adoptés, la logistique n'éprouve aucune difficulté sérieuse. Mais, quand il s'agit d'entités nouvelles, dont l'usage scientifique est encore contesté, il ne paraît pas que la logistique doive apporter un concours bien efficace pour la solution des questions, tant il est vrai que l'introduction d'un être nouveau se justifie surtout par son usage mathématique. Et, tout d'abord, la logistique ne possède pas un procédé général de génération de toutes les entités possibles — il semble, d'ailleurs, que l'expérience (par exemple la mesure de certaines grandeurs physiques) joue, en ce qui concerne au moins l'origine des entités nouvelles, un rôle important. — Aussi, chaque fois qu'une entité nouvelle s'impose à l'attention des savants, la question préalable se pose de savoir si elle est réductible aux êtres connus, et seule une étude spéciale mathématique peut nous fournir des renseignements utiles à ce sujet. Si la logistique possédait un principe général restrictif (ou un petit nombre de tels principes) que devraient vérifier les êtres nouveaux, elle aurait un procédé logique simple permettant d'en éliminer un certain nombre. On a pu croire que le principe de la permanence des règles de calcul de Hankel jouissait de cette propriété ; mais, par une ironie singulière, ce sont les logisticiens qui en ont signalé la fausseté. Ce principe, rappelons-le, peut se formuler ainsi : « Si

l'on peut, pour les besoins de la généralisation, abandonner telle ou telle propriété d'une opération, on doit par contre s'interdire d'ajouter aucune propriété nouvelle à celles qui avaient déjà lieu pour l'opération restreinte, et cela, afin que toute règle établie pour l'opération généralisée soit applicable aussi à l'opération restreinte [1]. » Dire que ce principe est faux, cela signifie, en définitive, qu'il n'est pas possible de fixer aux opérations $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{\ }$, $\uparrow^2$ (ces opérations se réduisant aux opérations classiques pour les nombres ordinaires) des caractères généraux valables pour toutes les classes de nombres, et plus généralement pour toutes les classes d'entités mathématiques, car chaque classe particulière d'entités a ses lois opératoires propres. Mais alors, un raisonnement, semblable à celui de Weierstrass, pour montrer que tout nombre sur-complexe d'un ensemble à n unités capitales « est décomposable en r nombres complexes appartenant respectivement à r ensembles partiels à *une* ou à *deux* unités capitales... les ensembles à une unité capitale étant analogues à l'ensemble des nombres réels... les ensembles à deux unités capitales étant analogues à l'ensembles des nombres complexes ordinaires [3] ».

1. Houel, *Cours de calcul infinitesimal*, I, 5.

2. Nous adoptons le signe de Peano pour l'elevation aux puissances.

3. Couturat, *De l'Infini mathématique*, note I, p. 587.

raisonnement qui n'est possible qu'à condition de supposer l'associativité, la commutativité et la distributivité avec module de la multiplication des nouveaux complexes, reste bien formellement exact, mais perd toute portée philosophique générale, puisque le principe de Hankel est faux. Le champ reste donc absolument ouvert à la création d'entités nouvelles qu'il faudra individuellement soumettre à une étude mathématique appropriée. Ajoutons que les relations des entités avec leurs lois opératoires n'ont rien de fixe : certains nombres, comme les entiers, se reproduisent par addition et par multiplication, mais d'autres nombres (nombres algébriques du 2e degré, par exemple) engendrent des nombres, d'autre espèce qu'eux-mêmes, par addition et par multiplication.

Mais, de toutes les théories récentes, la théorie des nombres transfinis serait de beaucoup la plus instructive à examiner, précisément parce qu'il y a là une classe d'entités nouvelles sur la portée desquelles les mathématiciens ne sont pas d'accord. Quels sont les nombres transfinis qu'il faut admettre ? Ceux des deux premières classes ? Ceux d'une classe supérieure ? Les *types ordinaux* ne sont-ils pas appelés à un plus grand avenir que les *cardinaux transfinis ?* Faut-il rejeter tous ces nombres en bloc ? Les mathématiciens sont en désaccord, et les logisticiens — jusqu'à présent — ne sont arrivés à aucun résultat positif. Cependant, en

nous appuyant sur ce que nous enseigne l'histoire des mathématiques, nous avons tout lieu de croire que les géomètres résoudront seuls les difficiles problèmes que soulèvent les nouvelles doctrines. En effet, la théorie des imaginaires et des sur-complexes avait donné lieu à des difficultés logiques ou philosophiques dont la pensée mathématique, sans alliés étrangers, est parvenue à triompher. Il en sera de même bien probablement pour les nombres transfinis. Nous n'avons pas la prétention d'aborder ici le fond de ce problème ; constatons seulement, d'abord, que le critérium de l'utilité mathématique constitue, au moins provisoirement, un principe d'élimination qui permettra sans doute de condamner bien des parties de l'œuvre de Cantor. Ce critérium a été ainsi formulé par M. Picard : « Il n'y aura lieu de la développer (l'arithmétique des nombres transfinis) que si ces vues se montrent fécondes dans l'analyse ; la considération des nombres transfinis a permis déjà de découvrir certains théorèmes, mais on doit dire qu'ils ont pu être obtenus par une autre voie[1]. » Il ne faut pas non plus oublier de distinguer — distinction qui pourrait échapper aux philosophes — la théorie des *cardinaux transfinis* de la théorie des *ordinaux transfinis*. En ce qui concerne la première théorie, l'opinion de M. Borel semble actuellement résumer le mieux la ques-

1. Picard, *La Science moderne et son état actuel*, p. 56.

tion : « Le deuxième principe de formation ne peut nous faire acquérir la notion d'une puissance que nous n'aurions pas déjà ; et il semble douteux que nous ayons une idée quelque peu précise de ce que peut être une puissance qui dépasse la deuxième... Mais, on ne peut nier que, actuellement, l'expression *transfiniment* n'ait encore pour nous un sens moins précis que l'expression *indéfiniment*, de sorte que nos connaissances précises sur les puissances diverses n'excèdent guère la remarque suivante : il y a des ensembles dénombrables et des ensembles non dénombrables, cette dernière notion étant surtout négative [1]. » La théorie des types ordinaux semble être appelée à jouer un rôle plus important que la théorie des cardinaux transfinis. Rappelons, à ce propos, les considérations qui ont conduit M. Baire à introduire la notion de transfini ordinal : « De même, pour les ensembles bien ordonnés, on conçoit qu'il peut être utile, pour fixer la notion de *rang* dans un tel ensemble, d'attacher un terme nouveau à cette notion, et de procéder comme si tous les éléments d'un ensemble bien ordonné avaient des rangs déterminés une fois pour toutes. Or, nous avons vu que les nombres entiers étaient insuffisants pour remplir ce but, nous leur adjoindrons de nouveaux signes qui seront les nombres transfinis [2]. » En résumé, il

1. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 122.
2. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 41.

semble bien que la détermination du bilan définitif de la théorie des transfinis soit de la compétence des mathématiciens, et que certains résultats seulement de la théorie de Cantor, mais non pas tous, comme semble le croire M. Russell, pourront être conservés. D'ailleurs, l'existence de la logistique n'est, d'après les explications que nous avons données plus haut, nullement liée au succès du transfinitisme intégral.

III

LES INTÉGRALES IRRÉDUCTIBLES ET LE NOMBRE DES IDÉES PRIMITIVES

On sait que dans les problèmes de quadrature, on est amené à considérer des fonctions qu'on ne peut intégrer au moyen des expressions algébriques et des transcendantes élémentaires (logarithme, exponentielle, fonctions circulaires) en nombre fini. On constate donc l'existence de types irréductibles à des formes plus simples. On dit qu'il y a alors des transcendantes nouvelles. Nous ne saurions trop insister sur la manière dont les mathématiciens étudient ces êtres nouveaux [1]. Le procédé que nous allons caractériser d'une manière géné-

1. On pourrait trouver d'autres exemples que celui que nous examinons pour justifier notre conception. Mais celui-là a l'avantage de mettre en évidence la notion fondamentale d'irréductibilité.

rale a, au point de vue philosophique, une importance considérable, puisque la prétendue chaîne des déductions purement analytiques des propositions mathématiques semble rompue à un moment donné; si tant est qu'on doive se représenter les propositions mathématiques comme formant une chaîne. On rencontre à un certain moment des êtres mathématiques, qu'on ne peut intégrer formellement au moyen des types élémentaires en nombre fini. On ne les proscrit pas pour cette raison du domaine de l'analyse ; mais, on les étudie en tant qu'objets nouveaux jouissant de propriétés *sui generis*. Ils auront des formules d'addition, de multiplication, des développements en séries, etc., qui leur sont propres.

Prenons, par exemple, les intégrales elliptiques qui jouent un rôle considérable en Analyse [1]. Considérons simplement l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}\,(x)}}.$$

Si R (x) est un polynôme du 3ᵉ ou du 4ᵉ degré, on aura une transcendante nouvelle; si R (x) est du 1ᵉʳ ou du 2ᵉ degré, l'expression s'intégrera au moyen

1. On sait que étant donnée : $u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, on considère la fonction $z = f(u)$, qu'on étudie dans le champ d'une variable complexe; cette dernière fonction est une fonction elliptique qui est méromorphe, bipériodique : ses propriétés, classiques aujourd'hui, sont exposées dans tous les cours d'analyse.

des fonctions élémentaires, généralement par un arc sinus ou par un logarithme. Mais que $R(x)$ soit du 2ᵉ ou du 3ᵉ degré par exemple, les mêmes idées élémentaires, les mêmes signes opératoires ou fonctionnels interviennent : $N_1, \int, d, +, -, \times, :, \sqrt{}, \lceil, /$ et la variable. Il suffit que le degré du polynôme contenu sous le radical en dénominateur augmente d'une unité, pour que brusquement, on se trouve en présence d'une transcendante nouvelle qui exigera des études spéciales considérables, et dont la théorie formera une partie importante de l'analyse. Voilà un fait, semble-t-il, dont la logique formelle ne peut rendre compte.

Il est bien entendu, qu'au lieu de se placer au point de vue des quadratures simples, on peut se placer au point de vue de l'intégration des équations différentielles. Et cherchant à approfondir le problème de la réductibilité et de l'irréductibilité, on pourra se demander : quand faut-il dire qu'une équation différentielle est réductible ou irréductible ? On sait que toute la théorie des groupes se rattache à ce problème. Montrons sommairement, d'après M. Painlevé, comment on peut répondre à cette question :

« Considérons une équation différentielle algébrique, que je choisis du premier ordre ; soit l'équation

$$(e) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y, x);$$

l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation dépend d'une constante arbitraire, soit u ; autrement dit, l'équation (e) définit une fonction y de deux variables x, u, ou plutôt une infinité de telles fonctions. Il est loisible de considérer u comme fonction de x, y ; cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f = 0,$$

qui équivaut à l'équation (e). L'intégrale générale de l'équation (e) sera dite *réductible*, si l'on peut adjoindre à l'équation (E) d'autres équations algébriques en x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ..., qui soient compatibles avec l'équation (E) sans en être une conséquence [1] ».

La définition s'étend à une équation ou à un système différentiel d'ordre quelconque. Admettons, pour ne pas donner trop de longueur à ces explications, que la définition ait été ainsi étendue, et que l'on ait défini ce que l'on entend par un *système réduit* [2] ; on pourra énoncer la proposition fondamentale suivante dans le cas du premier

1. Painlevé, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXVIII (juillet 1904), p. 198. Le principe de cette définition a été donné pour la première fois par M. Drach, dans sa thèse. Cette question a fait l'objet de travaux de MM. Painlevé et Vessiot.

2. Pour la définition du *système réduit*, cf. Painlevé, *Ibid.*, p. 200.

ordre : « Quand une équation différentielle est *réductible*, parmi les systèmes réduits il en est toujours un, d'ordre différentiel minimum, qui jouit des propriétés suivantes : 1° il est automorphe, c'est-à-dire que sa solution générale $u(x,y)$ se déduit d'une solution particulière quelconque $u_1(x,y)$ par les transformations $u = \psi\ (u_1)$ d'un *groupe* ; 2° tous les autres systèmes réduits se déduisent de celui-là, en y remplaçant u par une fonction U (u) qui vérifie une équation différentielle algébrique (en u, U) arbitrairement choisie [1]. »

Comme on le remarque aisément, ces importantes propositions donnent les caractères des équations réductibles, mais elles ne déterminent pas directement les caractéristiques des équations irréductibles. L'irréductibilité comme telle est définie négativement — comme ne remplissant pas les conditions de réductibilité — dans les propositions précédentes. Peut-il en être autrement ? Le caractère négatif de la notion rend la chose peu vraisemblable. Nous ne pousserons pas plus avant cet examen, nous contentant de remarquer que les entités qui ont ce caractère d'irréductibilité n'en sont pas moins étudiables en tant qu'objets donnés, et la question suivante se pose pour elles : Quand devra-t-on considérer les équations

1. Painlevé, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXVIII (juillet 1904), p. 200.

irréductibles comme intégrées ? M. Painlevé nous donne encore une réponse générale à cette question : « Une équation différentielle irréductible devra être regardée comme intégrée si, par un procédé d'approximation indéfinie (série, fraction continue, intégrale définie, etc.), on arrive à *représenter* l'intégrale générale dans tout son domaine d'existence, avec une erreur aussi petite qu'on veut, la représentation mettant en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale [1]. » Mais la question de la représentation d'une intégrale soulève une série de problèmes mathématiques. Remarquons notamment qu'il existe pour chaque fonction une *infinité d'expressions* propres à la représenter ; l'expression que l'on choisira devra mettre en évidence le plus exactement possible les propriétés caractéristiques de la fonction, et en particulier ses singularités. Or parmi cette infinité d'expressions entre lesquelles on a le choix, la logistique ne nous apporte aucun critérium positif qui nous permette de décider laquelle est la meilleure. Le mathématicien se trouve ici, comme nous l'avons déjà vu dans la théorie des nombres, en face de difficultés mathématiques réelles, vis-à-vis desquelles la logique formelle ne lui est d'aucune utilité.

Les êtres mathématiques irréductibles consti-

1. *Ibid.*, p. 202.

tuant une infinité non dénombrable, comment concilier ce fait avec la théorie logique, d'après laquelle il n'y a qu'un nombre fini d'idées élémentaires ? Faut-il dire que ces êtres mathématiques originaux, nombres transcendants, intégrales irréductibles, forment une *progression* ? Mais le terme de progression signifie dans la théorie logistique, une suite semblable à la suite des nombres naturels. Un nombre fini d'indéfinissables et de principes indémontrables suffit à constituer la suite illimitée des nombres naturels et leurs propriétés élémentaires. (Bien entendu, la doctrine logistique n'éclaircit pas la nature intime de ces nombres, comme on peut s'en rendre compte en étudiant la théorie des nombres premiers). Il y a en ce qui concerne les nombres naturels, permanence des règles opératoires élémentaires pour toute la suite. Si grand que soit un nombre naturel, eût-il cent chiffres, les lois de l'addition, de la soustraction, etc., resteront pour lui les mêmes que pour les premiers nombres, à moins de contester la valeur même du principe d'induction complète. Mais l'ensemble des transcendantes irréductibles ne saurait être considéré comme formant une progression. D'abord, les règles opératoires ne sont plus conservées ; par exemple, il y a une formule d'addition pour les fonctions elliptiques qui n'est pas la même (quoique ces formules aient des analogies) que la formule d'addition des

fonctions trigonométriques. De plus, il n'y a pas *consécutivité* entre les éléments d'un tel ensemble, comme il y a consécutivité dans la suite des nombres naturels. Enfin, la puissance de cet ensemble n'est pas semblable à celle de la suite des nombres naturels, la puissance de l'ensemble des êtres mathématiques irréductibles constituant une infinité non dénombrable. Mais, d'autre part, il est évident que nous ne pouvons penser avec une infinité de principes logiques. Sans doute, telles notions, comme celles qui sont représentées en mathématiques par les signes Σ, Π, $\int$, c'est-à-dire une somme infinie, un produit infini, une intégrale, impliquent une infinité d'éléments : mais on doit dire, en ce qui concerne ces notions, avec MM. Russell et Couturat, qu'elles sont pensées en compréhension et non en extension. Il faut donc conclure que nous pensons avec un nombre fini de constantes logiques (notions indéfinissables, propositions indémontrables), qui nous servent à étudier l'univers transfiniment infini des êtres mathématiques. Nous résumerons notre pensée sur la question du nombre des idées élémentaires, en disant que le système de nos idées logiques constitue un système fermé, et que l'univers des êtres abstraits et concrets auquel il s'applique demeurera toujours, pour nous, un système ouvert. Mais, par cela même, l'étude de l'univers des êtres ne sera jamais achevée, et elle nous contrain-

dra à modifier le système fermé des constantes logiques. Nous serons amenés, en effet, à considérer de nouveaux êtres irréductibles qui n'entreront pas nécessairement dans nos cadres logiques, d'où la nécessité de les perfectionner. Nous pensons toujours, à un moment donné de l'évolution, avec un système fini de constantes logiques ; mais à un système en succède un autre. M. Couturat a revendiqué le droit, parfaitement légitime, de transformer et d'améliorer la logique classique, et a victorieusement réfuté la thèse singulière, d'après laquelle, seule, parmi les productions de l'esprit humain, la logique, née du cerveau d'Aristote, constituerait un monument éternel et, partant, divin. Mais, précisément parce que la logique est soumise à la loi générale d'évolution, il n'est pas permis d'affirmer que la logique de M. Russell, qui a subi déjà de nombreuses modifications, possède ce caractère de pérennité que nous refusons, à juste titre, de conférer à l'œuvre d'Aristote. Observons que l'évolution peut se faire par voie d'adjonction — comme c'est le cas pour les mathématiques. Il n'est pas nécessaire, comme on le croit à tort, qu'elle se fasse par voie de contradiction (thèse hégélienne). La table de Pythagore, les formules de la trigonométrie formulées, dit-on, pour la première fois par Hipparque, vieilles de plusieurs milliers d'années, n'ont jamais été contredites, n'ont jamais cessé d'être vraies.

IV

LA NOTION DE FONCTION ET SES CONDITIONS RESTRICTIVES POUR SON USAGE MATHÉMATIQUE

Nous avons, dans les deux derniers paragraphes, indiqué des théories mathématiques qui font obstacle à une extension illégitime de la logistique hors de son champ d'application. Mais s'il existe des problèmes qui sont manifestement du ressort de la mathématique proprement dite et d'autres qui relèvent de la logistique, il y a aussi des théories mixtes où le départ de ce qui revient à la logique et à la mathématique est difficile à faire : il semble que la détermination de la nature des conditions restrictives de la notion de fonction rentre dans cette catégorie. Nous nous réservons d'examiner plus à fond, dans une autre étude, ce problème complexe qui soulève de nombreuses difficultés. Nous voudrions donner, dans ce court paragraphe, quelques indications sur la méthode qui permettra d'élucider ces questions.

On peut dire que la notion la plus générale de fonction est la fonction discontinue et non uniforme. Mais, on sait que l'analyse ne possède pas une théorie des fonctions répondant à ce type absolument général. Il est facile, en effet, de montrer que nous ne pouvons, actuellement, constituer une

théorie des fonctions discontinues les plus générales. Suivons le raisonnement de M. Borel : une fonction, pour pouvoir être étudiée, doit être donnée au moyen d'une infinité dénombrable de conditions ; il n'en est pas ainsi pour une fonction discontinue au sens le plus général : « une telle fonction est définie par une infinité *non dénombrable* de conditions ; en pratique cela revient à dire qu'il est impossible de la définir [1] ». On ne peut donc songer à aborder la théorie des fonctions en conservant à cette notion sa plus grande généralité. Il faut lui imposer des restrictions.

En s'en tenant à la notion même de fonction, M. Lebesgue a remarquablement retracé l'histoire des premières transformations de cette notion. Résumons brièvement son exposé. A l'époque de Newton et de Leibnitz, on appelait généralement « fonction une quantité y liée à une variable x par une équation où intervenait un certain nombre de symboles d'opérations (opérations arithmétiques, trigonométriques, logarithmiques) [2] ». Puis, on a été amené à considérer le cas (par suite des problèmes d'intégration) où, entre une expression $S(x)$ (aire) et x, il existe une relation géométrique. Alors on distingua « les figures géométriques définies à l'aide de lois exprimables par des éga-

1. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 126.

2. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 1.

lités géométriques et les figures qui n'étaient pas définies ainsi [1] ». Aux courbes qui rentraient dans le premier cas correspondaient les fonctions *continues* (continuité eulérienne), aux courbes de la deuxième espèce correspondaient des fonctions *arbitraires* qui n'étaient pas de vraies fonctions. « Les fonctions continues étaient les vraies fonctions [2]. » Plus tard, Fourier bouleversa cette manière de considérer les fonctions, en montrant que les « séries trigonométriques qui pouvaient être employées, dans des cas étendus, à la représentation des fonctions continues, pouvaient servir aussi à la représentation de fonctions non continues formées de parties de fonctions [3] ». Puis Cauchy, donne de la fonction la définition suivante : « y est fonction de x quand, à chacun des états de grandeur de x, correspond un état de grandeur parfaitement déterminé de y » [4]. Dans l'esprit de Cauchy, il fallait encore que ces correspondances fussent analytiques ; cette restriction a été levée plus tard. Sans nous arrêter à l'œuvre considérable de Riemann ni aux travaux ultérieurs qui ont illustré cette matière, signalons sommairement les résultats obtenus par M. Baire. M. Baire s'est demandé quelles étaient les conditions que

1. *Ibid.*, p. 3.
2. *Ibid.*, p. 3.
3. *Ibid.*, p. 3.
4. *Ibid.*, p. 4.

doivent remplir les fonctions discontinues, pour être représentables par des séries de fonctions continues. Il montre d'abord « qu'une fonction présentant *un nombre fini* de discontinuités est limite de fonctions continues [1]. » Plus généralement, il distingue les fonctions *ponctuellement* et *totalement discontinues*, suivant que leur oscillation a son minimum partout nul ou non [2]. (On sait que l'oscillation est la différence L-l, entre les valeurs maxima et minima de la fonction dans un intervalle). Il obtient le théorème suivant : « Toute fonction limite de fonctions continues est une fonction *ponctuellement* discontinue [3]. »

Après ce trop court exposé, il est permis de dire que le problème que nous avons posé est intimement lié à l'histoire même de la notion de fonction. Or cette histoire n'a jamais été spécialement et complètement exposée. On ne peut donc, tant que l'équivalent de l'ouvrage historique de Chasles, sur les méthodes de la géométrie [4], n'existera pas pour la théorie des fonctions, dégager nettement la part de logique proprement dite qui est impliquée dans la notion fondamentale de fonction et dans les conditions qu'on lui impose. Lorsque M. P.

1. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 11.

2. *Ibid.*, p. 75.

3. *Ibid.*, p. 83.

4. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie.*

Boutroux affirme : « que les conditions au moyen desquelles nous déterminons l'idée de fonction ont un caractère indéterminé, qu'elles ne sont pas la donnée, mais l'inconnue d'un problème [1] », ou encore que la recherche des conditions à imposer aux fonctions, constitue une opération extra-logique, il se place au point de vue de la découverte. Mais d'abord la notion de fonction se distingue difficilement de la notion de *relation*, qui semble bien faire partie de ces notions grammatico-logiques, que nous indiquions au début de cette étude comme faisant partie du domaine de la logistique. Les conditions les plus générales, au moins, que l'on impose à l'idée de fonction ne participent-elles pas aussi, dans une certaine mesure, de ce caractère logique ? Nous venons d'indiquer la méthode qui, selon nous, permettrait, en dégageant l'origine historique et les développements de chaque notion, de répondre à cette question ; nous ne pouvons songer à la développer ici.

V

CONCLUSION

Résumons brièvement les conclusions qui se dégagent de cette étude.

1. P. Boutroux, *Revue de métaphysique et de morale*, juillet 1905, p. 628.

Constatons, d'abord, que la controverse à laquelle nous avons fait allusion au début de notre travail, a cessé de porter sur les problèmes philosophiques essentiels, lorsqu'elle a dégénéré en un examen des cas de *tératologie* mathématique. L'antinomie Burali-Forti, la contradiction Richard, le sophisme « Tous les Crétois sont des menteurs » sont à l'extrême frontière de la science. Nous n'en contestons pas l'intérêt, mais il y a des problèmes plus fondamentaux, situés au cœur même des théories mathématiques. Vouloir réduire la philosophie des mathématiques à la solution des sophismes serait aussi illégitime que de prétendre voir, dans la physiologie pathologique, le modèle de toute physiologie. Or, un grand nombre de lecteurs pourraient avoir cette impression en étudiant les dernières discussions qui ont porté sur ces questions. La logistique n'enveloppe évidemment pas toutes les théories qui méritent d'attirer la réflexion du critique des sciences, et il y a de nombreux problèmes mathématiques proprement dits, qui soulèvent des questions philosophiques de grande portée.

Nous avons vu, ensuite, que la logistique constitue une branche restreinte, mais indispensable de la critique des Sciences [1]. Rappelons comment

1. Peirce soutenait que la logique est une branche des mathématiques, M. Couturat prétend que la mathématique est une branche de la logique (branche autrement impor-

Auguste Comte, qu'on cite communément comme un adversaire de la logique formelle, en concevait la possibilité vers 1830 : « J'ignore si, plus tard, il deviendra possible de faire *a priori* un véritable cours de méthode tout à fait indépendant de l'étude philosophique des sciences, mais je suis convaincu que cela est inexécutable aujourd'hui les grands procédés logiques ne pouvant être encore expliqués avec la précision suffisante séparément de leurs applications. J'ose ajouter, en outre, que lors même qu'une telle entreprise pourrait être réalisée dans la suite, ce qui, en effet, se laisse concevoir, ce ne serait jamais néanmoins que par l'étude des applications régulières des procédés scientifiques [1]... »

La légitimité même de la logistique, dans sa sphère propre, ne peut plus sérieusement être contestée, et la seule question qui subsiste est de savoir, *en fait,* dans quelle mesure elle a rempli sa tâche. Mais répétons encore qu'elle ne saurait prétendre au rôle d'une méthode nouvelle d'investigation ; le rapprochement de la logistique avec

tante que le tronc dont elle est issue). La question posée de cette manière formelle ne paraît pas avoir un grand intérêt pratique ou scientifique. L'essentiel est qu'il y a une branche d'études positives appelée logistique, que cette étude se fait sous forme d'un calcul symbolique, calcul dont l'efficacité est *spéciale* puisqu'il ne sert pas à résoudre les problèmes des autres branches des mathématiques.

1. Auguste Comte, *Cours de philosophie positive*, édition de 1830, I, 39.

le calcul différentiel et intégral, par exemple, serait complètement erroné. Le calcul différentiel et intégral a permis, dès son origine, de résoudre des problèmes mathématiques : problèmes de quadrature, problème de la tangente, problèmes plus particuliers comme celui de la chaînette. La logistique, qui reste la mathématique des éléments, n'a rien fait de tel. On ne saurait par suite la considérer comme une sorte de spécieuse universelle, dans laquelle la pensée mathématique s'anéantirait complètement.

Il y a, en résumé, deux conceptions de la logistique : l'une qui lui assigne une fonction positive spéciale, l'autre qui, voulant absorber en elle toute la pensée humaine, la transforme en une scolastique algébrique aussi stérile que la scolastique du moyen âge. Nous avons vu que la pensée scientifique se heurte à des problèmes réels, à des faits pour la solution ou l'explication desquels la réduction des méthodes mathématiques ordinaires aux méthodes logistiques n'apportait aucun avantage. La logistique, en tant qu'explication universelle, doit être condamnée au même titre que n'importe quelle métaphysique, parce que s'exerçant hors de son champ d'application, elle reste un pur jeu d'esprit sans utilité scientifique. Autre chose, en effet, est de déterminer et de classer les éléments grammatico-logiques, éléments du langage ordinaire, qui interviennent dans les mathématiques; autre chose

est de prétendre réduire absolument toutes les mathématiques à ces formes élémentaires. Dans le premier cas, on agit en savant, dans le second en métaphysicien. L'identification complète de la pensée mathématique avec les éléments grammatico-logiques qui la conditionnent est une illusion analogue à celle du dogmatisme matérialiste, qui assimile complètement la pensée aux éléments du cerveau, qui en sont les conditions matérielles de production. La preuve que cette identification est vaine résulte du fait que, si la logistique rendait le mécanisme de la pensée mathématique absolument transparent, et si elle absorbait effectivement cette pensée, on ne devrait plus jamais rencontrer de problèmes mathématiques présentant des difficultés que la logistique ne fût pas apte à résoudre immédiatement. Or, nous savons qu'il n'en est rien.

On nous demandera, peut-être, de répondre à notre tour à la question : Quelle conception doit-on se faire de la pensée mathématique intégrale ? Or, non seulement nous nous récuserons devant une pareille mise en demeure, mais nous prétendrons que personne ne pourra jamais résoudre ce problème dépourvu de sens positif.

En réalité, nous sommes en présence d'un ensemble de méthodes et de données irréductibles qui forment les diverses branches des mathématiques. Nous ne saurions, en aucune façon, expli-

quer cet ensemble de connaissances par une vue philosophique systématique. Du moins, une semblable explication n'aurait scientifiquement aucune valeur objective. Mais nous pouvons constater que les méthodes scientifiques s'organisent, se transforment conformément à l'idéal du logicien, en ce sens que la démonstration mathématique doit mettre son sceau sur les suggestions de l'intuition pour que la découverte prenne définitivement place au rang des vérités scientifiques.

En étudiant le mécanisme interne de cette démonstration, nous entrevoyons le sens logique « de la mystérieuse unité qui se manifeste dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés[1] », unité dont la réalisation complète ne saurait être considérée comme effectivement réalisée, mais seulement comme idéalement conçue, dans l'état actuel de nos connaissances.

1. Hermite, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1862, 2e semestre, t. LV, nº 2, p. 91.

CHAPITRE III

LA MÉTHODE HISTORICO-CRITIQUE

A. — L'ARITHMÉTIQUE

Étant donné un phénomène mécanique ou physique, la forme précise de la loi qui le régit, est, en général, une équation différentielle ou aux dérivées partielles. Ces équations, qui constituent les conditions analytiques du phénomène, permettent de l'étudier avec rigueur. Mais la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, qui forme avec la théorie des fonctions le domaine immense de l'analyse proprement dite, ne constitue pas, au point de vue mathématique, un corps de doctrine qui se suffise à lui-même. Les conditions analytiques reposent, elles-mêmes, sur des conditions algébriques, l'algèbre déterminant, si l'on peut dire, les conditions d'intelligibilité de l'analyse. Mais là ne s'arrête pas la marche de la pensée mathématique. L'analyse et l'algèbre soulèvent des problèmes d'ordre purement arithmétique, qui ne trouvent leur solution définitive que dans la théorie des nombres. Lorsqu'on veut approfondir les théories

les plus élevées de l'analyse, théories des fonctions elliptiques, des fonctions abéliennes ou des fonctions fuchsiennes, on rencontre entre ces théories et l'arithmétique des points de contact nombreux. Analyse, algèbre, arithmétique, tels sont les trois étages de la mathématique pure ; le mot étage n'est, d'ailleurs, pas absolument exact, parce que ces trois doctrines, loin de se juxtaposer, pénètrent, au contraire, les unes dans les autres. Pour être complet, il faut encore, comme nous l'avons vu, préalablement déterminer cette démarche de la pensée indispensable à l'exposition des mathématiques elles-mêmes, et qui lui est, en quelque sorte, antérieure : nous voulons parler du discours grammatical et des lois logiques qui le régissent. Nous avons appelé, selon un usage récent, *logistique* cette étude précise des lois grammatico-logiques qui constitue comme l'introduction à la mathématique. Il n'y a pas à chercher d'autres conditions d'intelligibilité d'un phénomène physique que celles que nous venons d'énumérer d'une manière générale ; tout effort pour saisir des principes fondamentaux antérieurs aux conditions mathématiques et logiques est condamné à l'insuccès, parce qu'il poursuit un but imaginaire.

Nous voudrions tâcher de montrer aux philosophes l'importance d'une Science qu'ils semblent avoir presque tous ignorée, bien qu'elle soit, sans doute, l'une des plus anciennes parmi les sciences

mathématiques : nous voulons parler de l'arithmétique supérieure ou théorie des nombres. Et avant d'aller plus loin, dissipons immédiatement une confusion qui pourrait se glisser dans l'esprit des lecteurs. Cherchant, dans son *Cours de Philosophie positive*, à caractériser le rôle propre de l'arithmétique, Auguste Comte le définit comme un *calcul des valeurs* qui intervient, lorsque l'algèbre a terminé son rôle, pour évaluer définitivement la formule, et il ajoute que le champ de l'arithmétique « est par sa nature infiniment restreint [1] ». La définition de Comte convient à l'arithmétique élémentaire, dont l'utilité pratique est considérable. Mais, précisément, son utilité est tellement évidente qu'il n'est pas nécessaire de la mettre en relief. Par arithmétique ou par théorie des nombres nous entendrons principalement, dans ce qui va suivre, cette branche des mathématiques supérieures qui comprend la théorie des congruences, la théorie des résidus, la théorie arithmétique des formes, l'analyse indéterminée, l'étude des propriétés des nombres incommensurables, des nombres transcendants, etc. On voit, d'après cette énumération qui n'est nullement exhaustive, que l'affirmation de Comte, que « le domaine de l'arithmétique est infiniment restreint », n'a de sens qu'en ce qui concerne l'arithmétique

1. A. Comte, *Cours de philosophie positive*, 1re édition, p. 183. Ajoutons cependant que Comte atténue un peu son affirmation dans un commentaire (p. 185).

élémentaire. Relativement à la théorie des nombres en général, il faut au contraire dire avec Hermite : « Quelle tâche immense pour la théorie des nombres de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres de raison, en les classant en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement, par des définitions caractéristiques élémentaires [1]. » Hâtons-nous d'ajouter que l'arithmétique supérieure se fonde sur l'arithmétique élémentaire dont elle n'est que le prolongement ; nous verrons en effet plus loin comment les plus hautes généralisations arithmétiques sont liées directement aux théorèmes élémentaires sur la divisibilité des nombres entiers.

On pressentira déjà maintenant pourquoi les plus illustres mathématiciens modernes : Lagrange, Gauss, Jacobi, Kummer, Dirichlet, Hermite se sont appliqués à approfondir cette branche de la science. Leurs travaux arithmétiques, mieux que des dissertations scolastiques sur l'un et le multiple, le continu et le discontinu, éclaireront celui qui cherche à connaître la nature des nombres.

Pour réaliser notre programme et montrer l'importance de la théorie des nombres, il faudrait caractériser brièvement (et surtout dans leurs rapports avec l'analyse et l'algèbre) les principales transformations de cette théorie à partir de Gauss,

1. Hermite, Lettre à Jacobi, *Œuvres*, I, p. 131.

transformations qui sont contenues dans les mémoires des mathématiciens que nous venons de citer. Mais, l'analyse de ces mémoires constituerait un travail considérable qui dépasserait le cadre de notre étude. Aussi avons-nous préféré suivre une marche plus philosophique, et plus propre à mettre en relief, sous une forme élémentaire, quelques-unes des notions fondamentales. Nous allons essayer de montrer que la plupart des grandes idées qui ont transformé l'algèbre et l'analyse : le nombre imaginaire, la variable continue, les développements en séries infinies, la notion de groupe, ont été également fécondes en arithmétique. Cette exposition établira, d'abord, la parenté intime qui unit l'arithmétique avec l'algèbre et l'analyse ; elle montrera ensuite qu'aucun domaine de la science humaine n'est achevé et que l'arithmétique pure évolue elle-même comme les autres sciences.

Nous nous efforcerons de faire notre exposé sous la forme la plus élémentaire possible.

I

LE NOMBRE IMAGINAIRE EN ARITHMÉTIQUE

Un des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique est le suivant : un nombre non premier peut être décomposé d'une manière et d'une seule en

un nombre fini de facteurs premiers. Ce théorème se rattache au théorème d'Euclide d'après lequel un produit de deux nombres ne peut être divisible par un nombre premier que si celui-ci divise l'un des facteurs, et ce dernier théorème à son tour se démontre à l'aide de l'algorithme qui sert à la recherche du plus grand commun diviseur [1]. Ces théorèmes étaient connus, du reste, à l'époque d'Euclide ; les géomètres grecs avaient touché le fond des choses, en cette matière, et fixé la base de la théorie de la divisibilité des nombres entiers. Si le premier théorème que nous venons de rappeler joue en arithmétique un rôle essentiel, c'est sans doute parce qu'il exprime un procédé élémentaire de la pensée, procédé d'après lequel elle cherche à saisir des éléments irréductibles. Les êtres à étudier forment, en effet, deux classes : les *êtres irréductibles* et les êtres *composés* d'éléments irréductibles; division qui correspond dans la théorie arithmétique élémentaire à classer les nombres en nombres premiers et en nombres composés de nombres premiers. Les nombres premiers, selon l'expression de Dirichlet, constituent : « das material aus welchem alle anderen Zahlen sich zusammensetzen lassen [2]. » Le procédé de décomposition en éléments irréductibles n'est pas spécial aux

1. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vierte auflage, p. 8.

2. *Ibid.*, p. 15.

nombres. On a par exemple souvent signalé l'analogie qui existe entre les polynômes irréductibles et les nombres premiers ; dans la théorie des fonctions rationnelles, des fonctions trigonométriques, des fonctions elliptiques, les formules fondamentales expriment la décomposition de ces fonctions en produit de facteurs ou en somme d'éléments simples. Pour une fonction rationnelle $F(x)$, par exemple, la formule de décomposition en facteurs a pour but de mettre en évidence les zéros et les infinis :

$$F(x) = C\frac{(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)\ldots\ldots(x-b_n)},$$

et la formule de décomposition en éléments simples :

$$F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_n x^n + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{L}{x-l}$$

met en évidence les points où la fonction devient infinie et la façon dont elle devient infinie. Les formules de décomposition bien connues pour les fonctions trigonométriques et elliptiques ont le même but que ces dernières.

Nous allons voir comment Gauss a été conduit à introduire en arithmétique la notion du nombre imaginaire, et comment on a été amené, à la suite de cette extension donnée à l'idée de nombre, à considérer des domaines numériques où le théo-

rème fondamental de la décomposition des nombres en facteurs premiers et l'algorithme du plus grand commun diviseur ne sont plus vérifiés. Les efforts des géomètres, notamment de Kummer, de Dedekind, de M. Klein et de M. Hilbert, ont eu pour but d'introduire dans l'arithmétique généralisée des principes tels que les lois élémentaires de la divisibilité fussent conservées dans tous les domaines numériques.

C'est dans le deuxième mémoire[1] sur la théorie des résidus biquadratiques (1832), que Gauss a introduit dans la théorie des nombres la notion du nombre complexe ou imaginaire. Depuis l'antiquité grecque aucune extension n'avait été donnée à la notion de nombre en arithmétique. Avant Gauss les seuls nombres entiers considérés étaient les nombres $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Or, depuis longtemps déjà l'algèbre connaissait des quantités de la forme $a + bi$, que l'on avait rencontrées tout d'abord dans la résolution de l'équation du deuxième degré. Les formules d'addition, de multiplication, d'extraction de racines, ainsi que la représentation géométrique de ces quantités étaient connues avant le mémoire dont nous parlons, et nous supposerons, puisqu'aujourd'hui elles font partie des éléments de l'algèbre, que le lecteur les connaît. L'originalité du deuxième mémoire sur la théorie des résidus biqua-

1. Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, commentatio secunda.

dratiques consiste en ceci, que pour la première fois on introduisait en arithmétique une notion qui avait conservé jusqu'alors un caractère purement algébrique, de même que l'originalité de Cauchy a consisté à introduire cette même notion dans la théorie des fonctions. Sans entrer dans le détail du mémoire, nous devons, au moins, en indiquer le sujet, afin de montrer d'une manière précise comment Gauss a introduit les quantités complexes.

Rappelons, tout d'abord, quelques notions élémentaires. Lorsque la différence entre deux nombres a et b est divisible par un nombre m, les nombres a et b sont dits congrus module m, et cette propriété s'écrit

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Lorsque la différence $a - b$ n'est pas divisible par m, les nombres sont dits *incongrus module m.* Dans le premier cas chacun des nombres a et b est le *reste* de l'autre, dans le deuxième cas il est un *non-reste* [1]. On conçoit qu'on peut considérer des congruences où interviennent des quantités inconnues; la congruence du premier degré à une inconnue a la forme

$$ax \equiv b \pmod{m},$$

x étant l'inconnue.

1. Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, § 1.

D'une manière générale, on appelle congruence de degré n, la congruence suivante

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

$f(x)$ étant un polynôme entier en x à coefficients entiers et du degré n. Résoudre la congruence, c'est déterminer les valeurs entières de x qui y satisfont.

Considérons simplement les congruences de la forme

$$x^n \equiv a \pmod{m}$$

qu'on appelle congruences binômes. Si $n = 2$, on a

$$x^2 \equiv a \pmod{m}$$

et le nombre a est appelé un *reste quadratique* par rapport au module m : c'est un nombre tel que la congruence précédente soit possible selon le module m.

Dans le cas où $n = 4$, la congruence devient

$$x^4 \equiv a \pmod{m}$$

et dans le cas où l'on peut la résoudre, a est un reste biquadratique module m, dans le cas contraire, un non-reste biquadratique.

Dans la théorie des résidus quadratiques, on devra principalement chercher à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Etant donné le module m, quels sont les nombres a qui sont des restes quadratiques de m ?

2° Etant donné le nombre a, quels sont les modules dont a est reste quadratique [1]?

La théorie des résidus biquadratiques est analogue à la théorie des résidus quadratiques, mais elle est plus compliquée; nous ne pouvons, bien entendu, en aborder ici l'exposition.

Dans son premier mémoire, Gauss établit d'abord un grand nombre de propriétés particulières intéressantes; puis, dans le deuxième mémoire [2], il constate que la méthode employée jusqu'alors ne peut donner une doctrine renfermant tous les cas, exposée sous une forme rigoureuse; et il est amené, pour élaborer cette doctrine, à étendre le champ de l'arithmétique qui comprend désormais les nombres entiers complexes $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$, a et b étant des entiers quelconques prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.)

Le domaine des nombres entiers complexes $a + bi$ comprend :

1° Les nombres entiers positifs, négatifs et zéro;

2° Les nombres imaginaires entiers, où $b \neq o$, qui se divisent en imaginaires sans partie réelle, et imaginaires avec une partie réelle pour $a \neq o$ et $b \neq o$.

La conception de Gauss s'étend au cas où a et b sont fractionnaires; si a et b sont simplement rationnels, le nombre complexe sera rationnel. Le

1. Cahen, *Éléments de la théorie des nombres*, p. 114.

2. Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, commentatio secunda, § 30.

domaine des nombres complexes de Gauss $a+bi$, ainsi étendu, jouit des mêmes propriétés que le domaine des nombres rationnels, c'est-à-dire que les nombres complexes $a+bi$ se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division et que les théorèmes fondamentaux que nous avons rappelés plus haut sont encore vrais pour tous ces nombres. Signalons que, selon la dénomination de Dedekind, on appelle *corps* l'ensemble des nombres qui se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division. Rappelons encore que les nombres complexes de Gauss admettent les quatre unités $\pm 1, \pm i$, tandis que le corps R des nombres rationnels admet les deux unités ± 1. Nous aurons encore besoin dans la suite de la notion suivante : on appelle *norme* d'une imaginaire $a+bi$, le produit $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, qui se représente par $N(a+bi)=a^2+b^2$; c'est le produit de deux nombres imaginaires conjugués. La norme est toujours un nombre réel.

Les nombres de Gauss admettent aussi des nombres premiers et des nombres composés. Le nombre complexe composé est le nombre complexe qui se divise en facteurs premiers complexes qui ne sont pas des unités. Mais ici se produit un phénomène intéressant. Tandis que les nombres premiers réels de la forme $4h+3$, c'est-à-dire 3, 7, 11... etc., restent premiers dans le domaine des nombres complexes de Gauss, les nombres premiers de la

forme $4h+1$, c'est-à-dire 5, 13, 17... etc., auxquels il faut ajouter le nombre 2, sont décomposables en facteurs complexes :

$$2 = (1+i)(1-i),\ 5 = (1+2i)(1-2i),\ 13 = (3+2i)(3-2i) \dots \text{etc.}$$

Le lecteur familier avec la théorie des nombres se rappellera le théorème suivant dû à Fermat : Tout nombre premier de la forme $4h+1$ est décomposable, d'une seule façon, en une somme de deux carrés. Or, l'introduction du nombre complexe rend presque immédiate la démonstration de ce théorème important. On voit sur cet exemple la puissance de la conception de Gauss.

On peut se demander maintenant, comment on reconnaîtra un nombre premier complexe de la forme $a+bi$ d'un nombre complexe *composé*. La proposition suivante donne ce critérium : Chaque nombre entier complexe $a+bi$ est premier ou composé selon que sa norme est un nombre premier ou un nombre composé. En dehors des quatre unités les nombres premiers du corps J (nombres de Gauss) sont :

1° Les nombres premiers rationnels de la forme $4h+3$.

2° Le nombre $1+i$ (et les nombres qui lui sont conjugués).

3° Les nombres $a+bi$ dont la norme est un nombre premier rationnel de la forme $4h+1$.

Enfin on établit[1] qu'on peut trouver par un nombre fini de divisions, le plus grand commun diviseur de deux nombres complexes entiers quelconques du corps J; qu'un nombre premier complexe de ce corps ne peut diviser un produit s'il ne divise au moins l'un des facteurs; qu'un nombre composé peut toujours, et d'une seule manière, être mis sous la forme d'un produit de nombres premiers, quatre nombres premiers associés ne comptant que comme représentants d'un seul et même nombre premier. Les lois de la divisibilité du corps J coïncident donc avec celles du corps R des nombres rationnels.

Il y a, d'ailleurs, d'autres nombres entiers quadratiques qui jouissent des mêmes propriétés arithmétiques que les nombres rationnels, ce sont les nombres complexes $a + b\theta$ pour lesquels a et b prennent toutes les valeurs rationnelles et entières y compris zéro, et où θ est racine de l'une des équations

$$\theta^2 + \theta + 1 = 0, \qquad \theta^2 + \theta + 2 = 0, \qquad \theta^2 + 2 = 0.$$

La conclusion que nous tirons de cet exposé, c'est que grâce à l'introduction des nombres $a + bi$, Gauss a apporté un perfectionnement considérable à certaines théories arithmétiques, comme la théo-

1. Gauss, *loc. cit.*, § 37, et Dirichlet : *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, *Journal de Crelle*, t. XXIV.

rie des résidus biquadratiques, et a rendu très simple la démonstration de plusieurs théorèmes comme celui de Fermat. Mais toute médaille a son revers, et comme nous l'indiquions plus haut, les idées de Gauss ont suggéré la considération de certains domaines numériques, où les lois de la divisibilité des nombres rationnels ne sont plus vérifiées, où l'arithmétique élémentaire semble donc bouleversée. Nous allons considérer maintenant ces domaines numériques, et nous verrons comment les géomètres ont remis de l'ordre dans cette apparente anarchie [1].

II

LES NOMBRES IDÉAUX ET LES IDÉAUX

Kummer, en étudiant la théorie arithmétique de la division du cercle, a remarqué des nombres qui ne présentent pas les caractères fondamentaux de

1. Nous ne pouvons donner dans cette étude que des indications générales et par conséquent incomplètes. Nous devons, cependant, pour éviter une confusion possible, rappeler le mémoire célèbre de Galois (*Œuvres*, p. 15), où le grand géomètre introduit la notion d'imaginaire qu'on appelle *imaginaire de Galois.* La théorie de Galois a une grande importance dans la théorie des nombres. Nous renvoyons à l'excellent exposé qu'en a donné M. Borel (*Introduction à la théorie des nombres*, Nony, 1895, p. 58). Faisons remarquer, seulement, qu'il n'y a aucun rapport entre l'imaginaire de Galois et le nombre complexe de Gauss. Le symbole i est défini dans le premier cas par la congruence irréductible $f(i) \equiv o$ (mod. p), et dans le second cas par l'égalité $i^2 + 1 = o$.

l'arithmétique élémentaire. Les nombres signalés par Kummer peuvent se représenter de plusieurs manières entièrement distinctes sous la forme d'un produit de nombres indécomposables, et, par suite, ces nombres ne vérifient pas non plus le théorème d'après lequel un nombre premier ne peut diviser un produit de plusieurs facteurs s'il ne divise au moins l'un d'eux. Kummer est parvenu à faire coïncider l'arithmétique de ces nouveaux domaines de nombres avec celle des nombres rationnels, par l'introduction d'une nouvelle notion, celle de *nombres idéaux* qui, selon ses propres expressions, « rendent visible, pour ainsi dire, la constitution intérieure des nombres [1] ».

Il est intéressant, au point de vue psychologique tout au moins, avant de commencer l'exposition technique de ces nouvelles notions mathématiques, de rappeler les considérations philosophiques qui ont conduit Kummer à sa découverte. Elles sont contenues dans le mémoire que nous venons de citer. « Qu'il me soit permis de signaler ici en peu de mots l'analogie de cette théorie de la composition des nombres idéaux avec les principes fondamentaux de la chimie. La composition des nombres complexes peut être envisagée comme l'analogue de la combinaison chimique ; les facteurs premiers correspondent aux éléments ou plutôt aux équiva-

1. Kummer, *Journal de Liouville*, vol. XVI, année 1851.

lents de ces éléments. Les nombres complexes idéaux sont comparables aux radicaux hypothétiques qui n'existent pas par eux-mêmes, mais seulement dans les combinaisons; le fluor[1], en particulier, comme élément qu'on ne sait pas représenter isolément, peut être comparé à un facteur premier idéal. La notion de l'équivalence des nombres idéaux est, au fond, la même que celle de l'équivalence chimique... En comparant les méthodes de décomposition de l'analyse chimique à celles de la décomposition des nombres complexes, on trouve encore des analogies surprenantes. Car, de même que les réactifs chimiques, joints à un corps en dissolution, donnent des précipités au moyen desquels on reconnaît les éléments contenus dans le corps proposé, de même les nombres que nous avons désignés par $\psi\ (\eta)$ comme réactifs des nombres complexes, font connaître les facteurs premiers contenus dans les nombres complexes en mettant en évidence un facteur premier q... Toutes ces analogies qu'on pourra poursuivre et augmenter à volonté, ne proviennent pas d'un jeu d'esprit oisif, mais elles sont bien fondées en ce que les mêmes idées fondamentales de la composition et décomposition des éléments règnent aussi bien dans la chimie

1. Il ne faut pas oublier que ce mémoire a été publié en 1851. Aujourd'hui on sait isoler le fluor, mais on ne sait pas isoler l'ammonium, par exemple. On trouverait aussi dans la chimie organique des radicaux non isolables.

des matières naturelles que dans celle des nombres complexes. »

Kummer considère les nombres indécomposables mais qui ne se comportent cependant pas comme de véritables nombres premiers, comme des produits de facteurs premiers idéaux qui ne se manifestent que dans la combinaison, et n'ont aucune existence indépendante propre. Le nombre idéal n'est pas défini en lui-même, Kummer définit seulement la divisibilité par le nombre idéal. Ainsi, si un nombre *a* possède une propriété A, qui en définitive consiste en ce que *a* satisfait à une ou plusieurs congruences, *a* est divisible par un nombre idéal déterminé, qui correspond à la propriété A. Mais, cette conception qui a donné de surprenants résultats dans le domaine de l'arithmétique supérieure, offre cependant de graves défauts que Dedekind a parfaitement mis en relief, et il a été amené à substituer à la conception de Kummer une conception différente, mais inspirée par le même principe. Résumons donc brièvement les considérations qui ont amené Dedekind à modifier la conception de Kummer[1]. D'abord la méthode de Kummer pourrait entraîner des confusions fâcheuses entre la théorie des nombres idéaux et celle des nombres rationnels. D'autre part, il est

1. Dedekind. Sur la théorie des nombres entiers algébriques, apud *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1876 et 1877.

nécessaire d'obtenir une définition unique et exacte pour tous les domaines numériques que l'on pourra considérer, et de posséder, en même temps, une définition générale de leur multiplication. On aurait alors réalisé le but de Dedekind qui est « de développer les principes fondamentaux de la théorie générale, échappant à toute exception, des nombres entiers algébriques ». Or, lorsqu'on veut, avec les seuls moyens de Kummer, réaliser les conditions que nous venons d'exposer, on aboutit à des propositions d'une extrême complication. Dedekind évite l'introduction des nombres idéaux grâce à la théorie suivante : « comme une propriété caractéristique A sert à définir non un nombre idéal lui-même, mais seulement la divisibilité des nombres contenus dans un domaine numérique par un nombre idéal, on est conduit naturellement à considérer l'ensemble de tous les nombres a du domaine considéré qui sont divisibles par un idéal déterminé ; *j'appellerai un tel système un idéal*, de sorte que à tout nombre idéal déterminé correspond un idéal déterminé[1]. »

Nous venons de donner l'idée générale de ce que Kummer entend par un nombre idéal et de ce qui, d'après Dedekind, constitue un idéal. Il nous reste à préciser ces notions, en montrant comment elles se comportent effectivement dans leur usage ma-

1. Dedekind, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1877.

thématique. Nous empruntons à Dedekind un exemple particulier assez simple pour que la notion du nombre idéal de Kummer soit seule employée. Nous verrons après comment Dedekind introduit son idéal, et nous résumerons les principaux résultats qu'il obtient pour le cas général des entiers algébriques.

Considérons un nombre complexe $x+y\theta$. Mais tandis que les nombres de Gauss doivent être considérés comme des nombres $x+y\theta$, où θ est racine d'une équation

$$\theta^2 + 1 = 0,$$

dans les nombres que nous considérons maintenant, θ est racine de l'équation :

$$\theta^2 + 5 = 0.$$

Dans le domaine de tous les nombres $x+\theta y$ que nous considérons, se produit précisément le fait singulier que nous avons signalé : un seul et même nombre composé peut être représenté de façons complètement différentes sous la forme d'un nombre fini de facteurs indécomposables.

Soient les quinze nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
a = 2, & b = 3, & c = 7 \\
b_1 = -2 + \theta, & b_2 = -2 - \theta & \\
c_1 = 2 + 3\theta, & c_2 = 2 - 3\theta\,; & \\
d_1 = 1 + \theta, & d_2 = 1 - \theta\,; & \qquad\qquad (\mathrm{I}) \\
e_1 = 3 + \theta, & e_2 = 3 - \theta\,; & \\
f_1 = -1 + 2\theta, & f_2 = -1 - 2\theta\,; & \\
g_1 = 4 + \theta, & g_2 = 4 - \theta. &
\end{array}$$

Chacun de ces nombres est indécomposable ; on peut le démontrer en se servant de la théorie des formes quadratiques binaires [1], mais, il nous suffit de retenir le résultat. Or, bien que ces nombres soient indécomposables, il existe entre eux les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} ab = d_1 d_2, & b^2 = b_1 b_2, & ab_1 = d_1, \\ ac = e_1 e_2, & c^2 = c_1 c_2, & ac_1 = e_1^2, \\ bc = f_1 f_2 = g_1 g_2, & af_1 = d_1 e_1, & ag_1 = d_1 e_2. \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Il est aisé de vérifier ces formules en substituant les valeurs données par les formules (I) dans les formules (II). Or, dans ces relations (II), un même nombre est représenté de deux ou trois manières différentes sous la forme d'un produit de deux facteurs indécomposables, et par suite un nombre indécomposable peut diviser un produit sans diviser l'un ou l'autre des facteurs, ce qui est en contradiction manifeste avec un théorème de l'arithmétique élémentaire. Ces nombres indécomposables ne possèdent donc pas la propriété qui, dans l'arithmétique des nombres rationnels, caractérise un nombre premier. Voyons par quelles considérations Kummer est parvenu à reconstituer pour les nombres que nous examinons une arithmétique conforme à l'arithmétique ordinaire.

On peut reconnaître la constitution d'un nombre rationnel entier, sans le décomposer en facteurs, en

1. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 71.

considérant la façon dont il se comporte comme diviseur [1]. Ainsi, si l'on sait que le nombre positif a ne divise un produit de deux carrés que si l'un des carrés au moins est divisible par a, a est égal à 1, ou à un nombre premier, ou au carré d'un nombre premier. De même, un nombre a doit contenir au moins un facteur carré, lorsqu'il existe un nombre non divisible par a, et dont le carré est divisible par a. Si un nombre a réunit les deux caractères précédents, il est le carré d'un nombre premier.

Examinons le nombre 2, au point de vue que nous indiquons, dans le domaine particulier considéré par Dedekind. Soient ω et ω' deux nombres de ce domaine. Pour que 2 divise $\omega^2\omega'^2$ et par suite le produit des nombres rationnels $N(\omega)$ $N(\omega')$, il faut que l'une des normes et l'un des carrés au moins soient divisibles par 2. Si x et y sont impairs, $\omega = x + y\theta$ n'est pas divisible par 2, et son carré est divisible par 2. En tenant compte des précédentes observations, on peut dire que 2 se comporte dans le domaine considéré comme s'il était le carré d'un nombre premier α.

Quoique ce nombre α n'existe pas dans le domaine considéré, Kummer l'introduit sous le nom de nombre idéal. On reconnaît que ce nombre idéal α possède le caractère d'un nombre premier en ce sens que tout produit de deux nombres non

1. Dedekind, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1877.

divisibles par α est non divisible par α. On examine d'une manière analogue les nombres 3 et 7; qu'il nous suffise d'indiquer que, de même que 2 se comporte comme le carré d'un nombre idéal, 3 se comporte comme le produit des deux nombres premiers idéaux β_1, β_2, et 7 comme le produit des nombres premiers idéaux γ_1 et γ_2, etc.

Revenons aux quinze nombres que nous avons examinés plus haut et considérons-les comme des nombres entiers (a étant un nombre premier avec b et c). Nous pourrons exprimer ces quinze nombres indécomposables comme des produits de nombres premiers idéaux désignés par α, β_1, β_2, γ_1, γ_2 qui vérifient les formules (II); nous aurons :

$$
\begin{array}{llll}
a = \alpha^2, & b = \beta_1\beta_2, & c = \gamma_1\gamma_2. & \\
b_1 = \beta_1^2, & b_2 = \beta_2^2; & c_1 = \gamma_1^2, & c_2 = \gamma_2^2: \\
d_1 = \alpha\beta_1, & d_2 = \alpha\beta_2; & e_1 = \alpha\gamma_1, & e_2 = \alpha\gamma_2; \\
f_1 = \beta_1\gamma_1, & f_2 = \beta_2\gamma_2; & g_1 = \beta_1\gamma_2, & g_2 = \beta_2\gamma_1.
\end{array}
$$

Nos quinze nombres indécomposables se comportent dans les questions de divisibilité, relatives au domaine numérique considéré, comme s'ils étaient composés au moyen de cinq nombres premiers idéaux α, β_1, β_2, γ_1, γ_2.

Grâce à l'introduction de ces notions nouvelles, les lois de la divisibilité du domaine considéré deviennent régulières. Sans étudier ces lois en détail, indiquons qu'on obtient le théorème suivant : « Tout nombre existant $\omega = x + y\,\theta$, différent

de zéro et de ± 1, est ou un nombre qui possède les caractères propres aux nombres premiers, ou bien il se comporte dans toutes les questions de divisibilité, comme s'il était un produit composé d'une manière complètement déterminée de facteurs premiers existants et idéaux. »

Mais, pour des raisons que nous avons sommairement indiquées plus haut, Dedekind [1] remplace le nombre idéal de Kummer par l'idéal qu'il introduira de la manière suivante. Considérons le système A de tous les nombres $\omega = x + y\theta$, divisibles par le nombre premier idéal α; considérons de même les systèmes B_1, B_2, C_1, C_2 des nombres ω divisibles respectivement par les idéaux premiers β_1, β_2, γ_1, γ_2. Désignons par M un des cinq systèmes précédents, M jouira des deux propriétés suivantes :

1° Les sommes et les différences de deux nombres du système M seront toujours des nombres de ce même système M.

1. D. Hilbert dans un mémoire fondamental, (publié en 1897 par la *Deutsche Mathematiker Vereinigung*) auquel devra toujours se reporter le mathématicien, a systématisé et refondu la théorie de Dedekind. Au point de vue de la genèse des idées élémentaires, auquel nous nous sommes placé, il n'est pas nécessaire de resumer ici le travail de Hilbert. La définition suivante qu'il donne de l'idéal équivaut à celle de Dedekind : « un système d'un nombre infini d'entiers algébriques α_1, α_2... du corps K, tel que toute combinaison linéaire $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$... (où λ_1, λ_2... sont des nombres entiers du corps) appartienne encore au système est dit un idéal. » (Trad. française de A. Lévy : *Annales de la Faculte de Toulouse*, 1909.)

2° Tout produit d'un nombre du système M et d'un nombre du domaine numérique considéré est un nombre du système M.

« Nous appellerons, maintenant, tout système M, composé de nombres du domaine considéré et jouissant des deux propriétés 1° et 2°, un idéal. » Dans l'exemple développé précédemment, les idéaux n'ont été considérés que dans le domaine des nombres $\omega = x + y\,\theta$ (pour θ racine de l'équation $\theta^2 = -5$). Mais Dedekind, pour réaliser le programme qu'il s'est tracé, les introduit dans le domaine des nombres entiers algébriques[1] en général. Nous ne suivrons pas Dedekind dans l'exposé de toute sa théorie. Il nous suffira d'avoir caractérisé le problème qu'il fallait élucider et d'avoir déterminé le principe nouveau qui a permis de le résoudre ; principe qui consiste à considérer tout système M, composé de nombres entiers du corps étudié qui possède les propriétés 1° et 2°, comme un idéal du corps. Il s'ensuivra que : « Les lois de la divisibilité des nombres algébriques sont entièrement contenues dans les lois de la divisibilité des idéaux[2] ». Il nous suffira donc d'indiquer quelques-unes des lois principales de la divisibilité des

1. θ est un nombre algébrique du degré n, s'il vérifie l'équation irréductible $\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = o$. Si cette équation a pour coefficients des nombres rationnels entiers θ sera un nombre algébrique entier.

2. Dedekind, *loc. cit.*

idéaux. « Si l'idéal A est divisible par l'idéal premier P, il existera un idéal A′, et un seul, tel que l'on aura $PA' = A$ et en même temps on aura $N(A') < N(A)$. — Tout idéal A différent de l'unité est lui-même un idéal premier, ou bien il peut se mettre sous la forme d'un produit d'idéaux tous premiers, et cela d'une seule manière. — Si l'idéal C est divisible par l'idéal A, il existera un idéal B, et un seul satisfaisant à la condition $BA = C$. — Si le produit AB est divisible par le produit AB′, B sera divisible par B′ ; et de $AB = AB'$ il s'ensuivra $B = B'$. »

Telle est, brièvement résumée, la théorie des nombres idéaux et des idéaux [1], grâce à laquelle l'arithmétique la plus générale possède les mêmes lois de divisibilité que l'arithmétique élémentaire.

III

LA NOTION DE GROUPE EN ARITHMÉTIQUE

La théorie des groupes est aujourd'hui familière à tous les mathématiciens, et nous pouvons admettre que, sous sa forme élémentaire, elle est connue aussi des philosophes qu'intéresse la philosophie

1. Pour être complet, il aurait fallu exposer la théorie de l'idéal de Klein. Mais les théories de Dedekind et de Klein sont équivalentes : nous avons donc cru pouvoir nous abstenir d'exposer les idées du célèbre géomètre de Goettingen pour ne pas donner trop d'étendue à notre étude.

des mathématiques. Car, dès l'année 1898, M. Couturat faisait paraître une excellente étude [1], où il montrait la portée générale de la théorie des groupes. Plus récemment, dans un remarquable exposé fait à la *Société de philosophie* [2], M. Bourlet a exposé les premières notions sur lesquelles repose la théorie des groupes et a indiqué le parti que la géométrie élémentaire pourrait tirer de la conception due au génie de Galois. Nous supposerons donc que le lecteur possède ces éléments, et nous chercherons à donner une idée du rôle considérable que la notion de groupe joue en arithmétique. Pour cela, et sans entrer dans beaucoup de développements que cette étude ne comporterait pas, nous montrerons les liens étroits qui unissent la notion de groupe de substitutions à une notion qui joue en arithmétique un rôle essentiel : la notion de *classe de formes*. Nous ferons voir ensuite que de cette notion dépend la solution d'un problème arithmétique essentiel, celui de la représentation des nombres par des formes. Mais pour faire saisir aux lecteurs comment ces notions se rattachent, il est nécessaire de rappeler certaines notions élémentaires.

On appelle *forme* un polynôme entier homogène.

1. Couturat, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1898, p. 437.

2. Bourlet, apud *Bulletin de la Société française de Philosophie*, séance du 21 mars 1907.

Selon que le polynôme est du premier, deuxième, troisième degré, etc., la forme est dite linéaire, quadratique, cubique, etc. Les formes se divisent encore selon le nombre de leurs variables, en formes à une variable, à deux variables ou formes binaires, à trois variables ou ternaires, etc. Par exemple, la forme quadratique binaire s'écrit :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

(On peut toujours considérer que le terme du milieu est pair, sinon on multiplierait la forme par 2).

L'expression $ac - b^2$ s'appelle le discriminant de la forme et se représente par D ; l'expression $b^2 - ac$ s'appelle son déterminant et se représente par Δ. Une des plus importantes questions de l'arithmétique sera de savoir quels sont les nombres qui sont représentables par une forme, c'est-à-dire ceux pour lesquels on ait :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n,$$

lorsqu'il s'agit, par exemple, de la représentation par une forme quadratique binaire. (Nous supposons les coefficients entiers.) Nous ne pourrons pas donner ici la réponse complète à ce problème qui a un caractère trop technique. Mais sa solution repose sur la considération de formes de même classe, et cette notion est liée à la notion de groupe, comme nous allons le voir immédiatement.

On sait que, étant donnée la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

faire dans cette forme une substitution linéaire $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, c'est remplacer

$$x \text{ par } \alpha x' + \beta y',$$
$$y \text{ par } \gamma x' + \delta y'.$$

La forme que l'on obtient après cette substitution s'appelle la *transformée* de la première. L'expression $\alpha\delta - \beta\gamma$ s'appelle le déterminant de la substitution. Si l'on passe d'une forme à une autre forme par une substitution linéaire telle que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, les deux formes sont dites *équivalentes*. Les substitutions de déterminant $= + 1$ s'appellent *substitutions modulaires*. Toutes les substitutions modulaires forment un groupe qui s'appelle le *groupe modulaire*[1]. On dit que deux formes appartiennent à la même classe, quand on passe de l'une à l'autre par une substitution du groupe modulaire, et l'on appelle *classe de formes*, toutes les formes qui se déduisent de l'une d'elles par des *substitutions du groupe modulaire*. Et alors se posent les deux problèmes que nous nous bornons à énoncer :

1° Étant données deux formes de même discriminant, voir si elles appartiennent ou non à la même classe ;

2° Quand deux formes appartiennent à la même

1. On dit que des substitutions forment un groupe, quand, 1° le produit de deux de ces substitutions appartient au groupe, 2° l'inverse d'une substitution du groupe appartient au groupe.

classe, trouver les substitutions modulaires qui permettent de passer de l'une à l'autre[1].

En ce qui concerne la solution du problème général de la représentation des nombres par une forme quadratique binaire, contentons-nous de dire que la théorie des résidus quadratiques donne une première condition[2] nécessaire, mais non suffisante pour qu'un nombre soit proprement[3] représenté par une forme. Cette condition étant réalisée, le problème consistera précisément à voir si deux formes qui ont été déterminées de certaine façon appartiennent à la même classe ou non[4]. On voit, par cet exemple, l'importance de la notion de groupe de substitutions en arithmétique.

IV

LA VARIABLE CONTINUE EN ARITHMÉTIQUE

« L'introduction de *variables continues* dans certaines formes quadratiques a été l'idée fondamentale qui a dominé la longue suite des travaux arithmétiques d'Hermite[5]. » Ainsi s'exprime M. Picard

1. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 141.

2. Cette condition consiste en ce que le discriminant changé de signe de la forme doit être résidu quadratique du nombre n.

3. On dit qu'une forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ représente *proprement* le nombre n lorsque x et y sont premiers entre eux.

4. Cahen, *Eléments de la théorie des nombres*, p. 279.

5. Hermite, *Œuvres*, édition Picard, préface, p. XIII.

dans sa préface aux œuvres d'Hermite. La conception du célèbre géomètre présente, au point de vue philosophique, un intérêt capital, puisqu'elle montre que, contrairement à certaines théories métaphysiques, la continuité peut jouer dans le domaine des nombres — que des philosophes considèrent comme le domaine exclusif du discontinu — un rôle important. La conception d'Hermite montre admirablement les liens profonds qui unissent les notions fondamentales qui sont à la base de l'arithmétique et de l'analyse.

Cependant, si nous ne voulons pas nous contenter d'une affirmation générale, il faudra bien que nous cherchions, d'une façon élémentaire tout au moins, à montrer comment Hermite[1] a été amené à introduire la notion du continu dans la théorie des formes : nous serons obligé de nouveau pour cela de rappeler un certain nombre de notions arithmétiques.

Nous avons indiqué, au paragraphe précédent, que l'un des problèmes essentiels de la théorie des nombres consistait à voir si deux formes de même discriminant appartenaient ou non à la même classe. Pour résoudre ce problème, on a été amené à considérer des formes déduites des formes considérées, formes plus simples que ces dernières et qu'on appelle *formes réduites*. Les coefficients de ces

1. *Ibid.*, I, p. 164 et suiv.

formes réduites doivent vérifier certaines conditions ($c \geqq a \geqq 2/b/$; $a \neq -2/b/$). Or, on divise les formes quadratiques binaires en deux catégories : les formes *définies* et les formes *indéfinies*. On appelle formes *définies*, les formes pour lesquelles la quantité $b^2 - ac$ est négative. On appelle *formes indéfinies*, celles pour lesquelles la quantité $b^2 - ac$ est positive [1]. Or, en ce qui concerne les formes définies, Gauss a montré comment, au moyen d'un nombre fini de substitutions modulaires, on pouvait toujours déterminer leurs réduites.

Pour déterminer les réduites des formes indéfinies, Hermite introduit la variable continue de la manière suivante :

on associe à la forme quadratique binaire *indéfinie*

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

la forme *définie* positive,

$$\Phi = (x - \omega' y)^2 + \theta\,(x - \omega'' y)^2,$$

ω' et ω'' étant les racines de l'équation en $\frac{x}{y}$ obtenue en égalant F à zéro.

On fait ensuite varier *d'une manière continue* le paramètre θ de zéro à l'infini, et on obtient de cette façon toutes les formes associées. On peut

1. Nous nous sommes souvent inspiré des notes du cours magistral de M. G. Humbert, professé au Collège de France en 1906-1907. Ce cours étant inedit, nous ne pouvons y faire de références plus précises.

définir maintenant ce que l'on entend par réduites d'une forme indéfinie F. On prend son associée Φ, et on donne à θ une valeur déterminée ; on saura, en vertu de la méthode de Gauss, trouver la substitution modulaire Σ qui réduit la forme définie Φ. Appliquons à F la *même substitution* Σ, la forme ainsi obtenue sera dite une réduite de la forme F. Mais si θ varie d'une manière continue, les réduites ne varient pas d'une manière continue. On voit, en effet, immédiatement, qu'une réduite R_i pour une valeur particulière θ_i de θ restera réduite pour toutes les valeurs qui continueront à satisfaire aux inégalités des réduites. La suite des réduites est discontinue ; on montre de plus que cette suite est illimitée, et que les réduites se reproduisent. Mais il n'est pas nécessaire que nous entrions dans plus de détails, il nous suffit d'avoir indiqué le parti que l'on a pu tirer, dans une question purement arithmétique, de l'introduction d'une variable continue. Ajoutons, cependant, que M. Poincaré a découvert un mode de représentation des formes indéfinies par certains réseaux, grâce auquel il a été conduit à une définition nouvelle de la réduction de ces formes. Cette conception permet de représenter géométriquement et d'une façon très simple la *réduction continuelle* des formes indéfinies.

Nous voudrions indiquer, maintenant, que l'application des principes moins élémentaires de l'analyse à l'arithmétique a encore donné de beaux résultats,

mais à cause du caractère technique des problèmes, nous nous bornerons à énoncer deux des principales applications.

Dirichlet [1], dès 1837, a démontré, au moyen des séries infinies, le théorème arithmétique suivant énoncé par Legendre : toute progression arithmétique dans laquelle le premier terme et la raison sont premiers entre eux contient une infinité de nombres premiers. Cette proposition est la généralisation du théorème élémentaire démontré par Euclide [2] : La suite naturelle des nombres contient une infinité de nombres premiers.

L'application des principes de la théorie des fonctions elliptiques a permis de résoudre, avec une grande élégance, bien des problèmes de la théorie des nombres concernant par exemple la décomposition des nombres en sommes de carrés.

*
* *

Si les mêmes notions fondamentales : nombre imaginaire, variable continue, séries infinies, théorie des groupes se montrent aussi fécondes en analyse qu'en arithmétique, c'est qu'il existe entre ces deux branches de la science des liens profonds, c'est qu'elles forment un ensemble dont les parties sont

1. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 342, et *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1837.

2. Euclide, *Eléments*, IX, 20.

solidaires. Cette solidarité explique pourquoi, lorsqu'on pousse assez loin les théories les plus élevées de l'analyse, théorie des fonctions elliptiques, des fonctions abéliennes, des fonctions fuchsiennes, on rencontre des problèmes arithmétiques. L'intérêt de la théorie des nombres, que les ignorants considèrent comme un jeu stérile de l'esprit, est donc toujours fondamental.

Nous avons vu comment le génie de Gauss avait renouvelé l'arithmétique, et nous avons indiqué, beaucoup trop brièvement sans doute, comment elle s'est transformée depuis Gauss. Ces transformations se sont accomplies conformément aux lois du progrès scientifique, en ce sens que les résultats véritablement acquis à la science l'ont été définitivement. Mais des notions plus compréhensives ont été successivement mises en évidence ; alors les théorèmes primitifs sont entrés comme des cas particuliers dans des théorèmes beaucoup plus généraux, la science s'élargissant, pour reprendre une expression classique, « en ondes concentriques ». Les ondes les plus larges, loin de détruire par un mouvement contraire celles qui sont de dimensions plus petites, les situent, si l'on peut dire, et déterminent leur portée.

L'arithmétique reste la science type. Sous sa forme élémentaire, en effet, elle est l'instrument indispensable du marchand, de l'ouvrier, de l'ingénieur, elle est l'outil intellectuel le plus nécessaire

à l'activité économique ; sous sa forme supérieure, elle demeure, à cause de la précision de ses notions, la branche des sciences où les démonstrations des vérités sont données de la manière la plus rigoureuse. Le philosophe trouvera donc dans l'arithmétique un objet solide sur lequel sa réflexion pourra s'exercer, d'autant plus que cette branche des mathématiques exige une moins grande somme de connaissances techniques que l'analyse ou que la géométrie. Mais, nous ne cesserons de le répéter, pour que cette réflexion philosophique soit efficace, il faut qu'elle s'oriente dans le sens même de la science ; il faut qu'elle s'efforce de faire progresser, avec ses propres moyens, la science positive, et qu'elle ne s'égare pas dans de vagues théories de la connaissance, qui ne sont, généralement, que des théories de l'ignorance.

Ajoutons, en terminant, que le philosophe ne tirera pas seul profit d'une instruction arithmétique approfondie. Cette instruction fait défaut, chose singulière, à bien des mathématiciens. Il serait évidemment utile à certains géomètres contemporains d'avoir été soumis à la rude discipline de la théorie des nombres. L'exposition de leurs théories y gagnerait en clarté et en rigueur. D'ailleurs, si l'arithmétique possède une pareille vertu éducative, c'est parce que les nombres forment, en quelque sorte, l'armature même de l'intelligence.

B. — L'ALGÈBRE

Parmi les théories qui constituent l'algèbre, la théorie des équations occupe une position centrale. La plupart des doctrines algébriques, comme la théorie des substitutions, la théorie des déterminants, etc., qui ont actuellement, si l'on peut dire, une sorte de vie autonome, ont été, à l'origine, élaborées à propos du problème de la résolution des équations algébriques.

Au point de vue de la genèse des idées fondamentales de l'algèbre, auquel nous allons nous placer dans cette étude, la théorie des équations jouera un rôle essentiel ; il importe donc de caractériser tout d'abord son objet. Soit :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

une équation algébrique complète de degré n à une inconnue, c'est-à-dire possédant toutes les puissances entières positives et décroissantes de x à partir de x^n, les a étant des quantités connues ; le *théorème* fondamental de l'algèbre nous apprend qu'une équation de degré n a toujours n racines réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. Le *problème* de la théorie des équations algébriques consisterait à calculer dans le cas général ces n racines, et pour cela à les exprimer en fonction des

quantités connues. Quelles sont les méthodes les plus générales qui nous permettent aujourd'hui d'aborder le problème de la résolution des équations d'ordre supérieur ? C'est ce que nous voudrions essayer d'exposer. Mais la science n'est pas arrivée du premier coup aux méthodes actuelles, et c'est précisément en cherchant à surmonter les difficultés que l'on rencontre dans le problème de la résolution des équations algébriques, que l'on a formulé les principes de théories qui, d'abord simples doctrines auxiliaires, devaient avoir sur toute la science mathématique un retentissement considérable. C'est cette constatation qui fait l'intérêt philosophique de notre étude. Donnons d'abord une vue d'ensemble de l'évolution de l'algèbre depuis le XVII[e] siècle jusqu'à nos jours.

Le premier mathématicien qui ait conçu l'idée d'une méthode générale de résolution des équations algébriques est Tschirnhaus [1]. La conception de Tschirnhaus est mise en évidence par le titre même de son travail : *Nova Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data æquatione* [2]. Nous aurons plus tard à revenir sur la méthode de Tschirnhaus ; qu'il nous suffise maintenant de rappeler que Tschirnhaus croyait pouvoir ramener toute équation complète de degré n, à une équation

1. Tschirnhaus, mathématicien et physicien, né en Allemagne en 1651, mort en 1708.

2. *Acta eruditorum*, II, 204, Leipsig, 1683.

binôme de même degré que l'on peut toujours résoudre par radicaux. Nous savons aujourd'hui que Tschirnhaus se trompait, et que sa méthode de transformation ne s'applique avec succès qu'aux équations générales de degré inférieur au cinquième. Mais cette méthode n'en a pas moins une grande importance : car, s'il n'est pas possible de ramener en général une équation complète d'ordre supérieur à la forme binôme, l'idée qui consiste à réduire, par des transformations algébriques appropriées, une équation donnée à une équation contenant un nombre moindre de termes, et à diminuer par suite le nombre des paramètres, est extrêmement féconde et va jouer dans la théorie moderne des équations un rôle essentiel.

Lagrange[1], dans ses fameux mémoires de l'Académie de Berlin (1770-1771), devait se placer à un point de vue différent — quoique en un sens on puisse montrer la solidarité de ces diverses méthodes ; — il devait se placer au point de vue de la formation d'équations résolvantes dont nous verrons plus tard la signification. La démarche de Lagrange est essentiellement philosophique. Il n'essaie pas, tout d'abord, de résoudre une équation particulière d'ordre supérieur; il paraît, au contraire, retourner en arrière. Au lieu d'étendre le terrain conquis, il

1. Lagrange, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, *Œuvres*, III, p. 203 et suiv.

va approfondir le domaine que l'on connaît déjà, et ce travail en profondeur permettra plus tard le travail en extension.

Tartaglia, Ferrari, Descartes, etc., avaient donné pour les équations des troisième et quatrième degrés, des formules de résolution, mais ces formules obtenues par des artifices de calcul, constituaient des résultats particuliers, sans liens les uns avec les autres. Lagrange allait dégager les principes de ces méthodes empiriques, principes qui devaient permettre plus tard l'élaboration d'une théorie scientifique. Selon ses propres expressions, Lagrange a donné : « les vrais principes, et, pour ainsi dire, la métaphysique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degrès [1]. » Et ce travail, disait-il encore « sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs ». La métaphysique dont parle Lagrange, aura principalement pour but de montrer que le problème de la résolution des équations est lié à un certain « calcul des combinaisons [2] », qui, développé, allait constituer la théorie des substitutions.

Profitant des indications de Lagrange, des résultats d'Abel et de Gauss, des mémoires de Cauchy sur les permutations, Galois, dans une synthèse géniale, allait mettre en pleine lumière le méca-

1. Lagrange, *Œuvres*, III, p. 357.
2. *Ibid.*, p. 403.

nisme de la résolubilité des équations, en rattachant définitivement cette question à la théorie des groupes de substitutions. Ainsi, un simple problème d'algèbre avait donné naissance à une théorie absolument nouvelle qui, en s'élargissant, allait avoir sur les diverses branches des mathématiques, analyse, géométrie, mécanique, une influence considérable. Quoique la théorie de Galois contînt les principes d'une théorie absolument générale de la résolubilité, le problème n'était cependant pas effectivement résolu par le travail de ce géomètre. Grâce à Lagrange, à Gauss, à Abel, à Galois, on connaissait le véritable mécanisme de la résolubilité par radicaux des équations complètes des quatre premiers degrés et de classes importantes d'équations d'ordre supérieur pour lesquelles il existe des relations particulières entre les racines (équations cycliques, équations abéliennes). Mais quand les racines d'une équation n'étaient pas calculables par des radicaux, l'équation était considérée comme non résoluble. Fallait-il donc se contenter de la solution négative d'Abel dans son mémoire sur l'équation du 5^e degré, d'après lequel les équations générales d'ordre supérieur au 4^e ne sont pas résolubles par radicaux ? Ne pouvait-on chercher à représenter les racines des équations non résolubles par radicaux par certains éléments analytiques nouveaux ? Hermite le premier s'attaqua à ce problème. Il rattacha l'étude de l'équation

complète du 5[e] degré aux équations modulaires de la théorie des fonctions elliptiques. Grâce à l'introduction de quantités auxiliaires, il parvint à représenter les racines séparément par des fonctions uniformes, et par suite il les calcula par des développements en séries ; Kronecker, à la même époque, aborda le même problème avec des méthodes analogues. M. C. Jordan généralisa et systématisa la théorie de Galois et en fit un véritable corps de doctrine ; enfin, M. Klein devait donner au problème fondamental de l'algèbre la forme la plus générale qu'il semble comporter aujourd'hui ; considérant une équation de degré n, M. Klein détermine le groupe fini de substitutions linéaires homogènes des n variables correspondant ; puis il calcule les valeurs des n variables au moyen des invariants du groupe (Formenproblem). « Le problème le plus simple, le *problème normal*, sera celui où il se présente le plus petit nombre de variables. Ce problème doit être regardé comme résoluble au moyen de séries quelconques [1]. » Le *problème théorique* est résolu uniquement par des considérations algébriques, mais le *calcul* effectif des racines se fera par des procédés analytiques au moyen des fonctions elliptiques. Nous développerons plus loin les idées de M. Klein. Qu'il nous suffise, pour l'instant, de

1. Klein, *Conferences sur les mathématiques*, trad. Laugel, p. 72.

remarquer que M. Jordan et M. Klein, en généralisant la théorie de Galois, ont mis parfaitement en évidence les principes fondamentaux sur lesquels est fondée la théorie de la résolubilité, entendue au sens le plus général.

Dans ce qui va suivre, nous allons successivement développer les différentes théories qui correspondent aux phases de l'évolution dont nous venons rapidement de donner un aperçu général. Nous avons dit que les principes, que les algébristes ont été amenés à introduire dans la constitution de leurs théories, avaient eu un retentissement sur toute la science mathématique. En effet, c'est l'étude des racines de l'équation du deuxième degré qui a primitivement donné naissance aux variables imaginaires dont l'introduction dans la théorie des fonctions devait amener les résultats que l'on sait. La théorie des groupes, théorie qui, transportée en analyse et en géométrie, a déterminé l'un des principaux progrès des mathématiques au XIX[e] siècle, est aussi d'origine algébrique, et l'on pourrait multiplier les exemples de ce genre.

Nous ne nous astreindrons pas à suivre la méthode simplement historique ; nous inspirant de l'exemple de Mach[1], et cherchant à appliquer aux mathématiques la méthode à la fois critique

1. Mach, *La Mécanique*, trad. Bertrand.

et historique que l'éminent penseur a développée dans l'étude de la formation des principes de la mécanique, tantôt nous chercherons à montrer comment l'idée a évolué, et tantôt nous caractériserons en dehors de toutes considérations historiques, le système des notions élémentaires dans leur enchaînement logique. Cette méthode est légitime, car à tout prendre, une histoire complètement objective des sciences est impossible : la publication intégrale de tout ce qui paraît serait la seule méthode historique vraiment objective, méthode dont l'absurdité saute aux yeux. La critique interviendra toujours pour discerner les travaux importants qui doivent constituer les théories scientifiques fondamentales.

Dans l'étude que nous entreprenons nous ne nous occuperons que de la théorie des équations algébriques. Nous n'insisterons pas sur les développements formels du calcul, cherchant surtout à mettre les *idées* en évidence. Le mot algèbre est synonyme, pour certains esprits, de l'expression : calcul formel. Mais cette conception n'est pas exacte, car le calcul algébrique n'est pas toute l'algèbre qui se compose de théories comme l'analyse et la géométrie. L'algèbre, au même titre que l'arithmétique, que l'analyse, que toute science, peut être considérée soit comme une « fin-en-soi », pour emprunter une expression à la philosophie classique, soit comme un moyen ; comme fin-en-

soi l'algèbre établit des théories générales, comme la théorie des équations ; comme moyen elle donne des algorithmes que les autres sciences emploieront. C'est ainsi que l'analyse peut être considérée comme un objet d'étude ayant sa raison en elle-même, ou comme un instrument servant à l'astronome et au physicien.

I

LES MÉMOIRES DE LAGRANGE

On peut, pour la clarté des idées, et sans attribuer à cette distinction une valeur absolue, ramener à deux types principaux les méthodes de résolution des équations algébriques. Le premier type se réduit à une *transformation* de l'équation considérée, le deuxième consiste dans la *construction de résolvantes.*

Tschirnhaus, le premier, a cherché à résoudre, par la transformation des équations, le problème général de l'algèbre. Lagrange, au contraire, a appliqué le second procédé.

Nous nous efforcerons tout d'abord de donner les traits essentiels de la méthode de Tschirnhaus qui correspond au premier type et qui est développée, comme nous l'avons déjà indiqué, dans un travail intitulé : *Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data æquatione.*

L'équation générale ayant la forme,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

supprimer les termes intermédiaires, c'est ramener l'équation précédente à une équation

$$z^n - b = 0, \qquad (2)$$

c'est-à-dire à une équation binôme que nous savons aujourd'hui être résoluble par des radicaux. Mais en quoi consistait exactement la méthode de Tschirnhaus et ne s'abusait-il pas sur la portée de cette méthode ?

Soit l'équation (1) que nous venons d'écrire. Tschirnhaus pose :

$$y = \varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots + \mu x^{n-1} \qquad (3)$$

les α, β, γ... étant pour le moment indéterminés. Puis il élimine x entre (1) et (3) c'est-à-dire qu'il forme le *résultant* [1] des relations $f(x) = o$ et $y - \varphi(x) = o$; soit $\Phi(y)$ ce résultant. La transformation de Tschirnhaus a pour but de faire disparaître dans l'équation transformée $\Phi(y) = o$, assez de coefficients pour que l'équation devienne résoluble ; on se sert pour cela de l'indétermination des coefficients α, β,... de la relation (3). Lorsque les

1. On sait qu'on appelle *résultant* de deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, l'expression suivante : $\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\,\varphi(\alpha_n)$: les α_1, α_2,... α_n, étant les racines du polynôme $f(x)$, dont nous supposons le coefficient du terme de degré le plus élevé égal à 1 pour plus de simplicité.

racines y_1, $y_2 \ldots$, y_n de l'équation $\Phi(y) = o$ sont distinctes, $f(x) = o$ et $\varphi(x) - y = o$ n'ont qu'une racine commune qu'on pourra exprimer rationnellement au moyen des a, des α, β, $\gamma \ldots$ et de y (par la recherche du plus grand commun diviseur). Si plusieurs valeurs de y sont égales, la détermination de x dépend d'une équation de degré supérieur au premier, mais inférieur à n. Ce procédé réussit pour les équations du troisième et du quatrième degrés.

Pour l'équation du cinquième degré

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0,$$

il faudrait poser d'après Tschirnhaus

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

et l'on obtient ainsi une équation transformée

$$y^5 + b_1y^4 + b_2y^3 + b_3y^2 + b_4y + b_5 = 0.$$

L'idée de Tschirnhaus consistait à s'arranger de façon à avoir :

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 0, \qquad b_4 = 0.$$

Mais l'on sait que la première de ces équations est du premier degré [1], la deuxième du deuxième, la troisième du troisième et la quatrième du quatrième degré. L'équation qu'on en déduirait serait,

1. On sait que dans l'équation $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = o$, a_1 est égal, au signe près, à la somme des racines, a_2 à la somme des produits des racines deux à deux, etc.

d'après un théorème connu, de degré égal au produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. On devrait résoudre une équation du vingt-quatrième degré. En résumé, la méthode de Tschirnhaus, telle qu'elle était conçue par son auteur, permettait de résoudre les équations de degré égal ou inférieur au quatrième, mais ne permettait pas la résolution d'équations complètes de degré supérieur. La transformation de Tschirnhaus n'en a pas moins un intérêt capital. Elle permet de mettre l'équation complète de degré n sous la *forme normale* (expression de M. Klein), c'est-à-dire sous la forme d'une équation où le terme de degré $n-1$ et le terme de degré $n-2$ disparaissent. S'inspirant de la pensée de Tschirnhaus, Bring et Jerrard devaient réussir à mettre l'équation générale du cinquième degré sous la forme d'une équation à un paramètre ($x^5 - x - \mathrm{A} = o$), ce qui, d'après les expressions d'Hermite : « constitue le pas le plus important que l'on ait fait dans la théorie algébrique des équations du cinquième degré depuis qu'Abel a démontré qu'il était impossible de les résoudre par radicaux [1] ».

Nous allons examiner maintenant la méthode de Lagrange. Nous avons rappelé déjà que le but de Lagrange était, en étudiant les procédés particuculiers employés par les mathématiciens qui avaient résolu les équations des quatre premiers

1. Hermite, *Œuvres*, II, 5.

degrés, de dégager une méthode générale de résolution. Le travail de Lagrange est contenu dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1770 et 1771. Dans les deux premières parties de son travail, l'auteur examine spécialement les méthodes de résolution des équations du troisième et du quatrième degrés, et il en tire *a posteriori* une méthode générale qu'il essaie dans la troisième partie d'appliquer aux équations d'ordre supérieur. Mais la quatrième section du mémoire nous intéressera spécialement. Elle est intitulée : *Conclusion des réflexions précédentes avec quelques remarques générales sur la transformation des équations* [1]. Elle contient des notions qui, développées, devaient conduire à la théorie moderne des équations fondée sur la théorie des groupes. C'est dans cette section qu'est contenue la doctrine prophétique que l'auteur résumait ainsi : « Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations et l'analyse la plus propre à y conduire ; tout se réduit, comme on voit, à une espèce de *calcul des combinaisons*, par lequel on trouve *a priori* les résultats auxquels on doit s'attendre [2]. » Nous allons donc examiner d'une manière plus précise la nature de cette analyse combinatoire qui devait mettre à nu le mécanisme sur lequel repose la théorie des équations.

1. Lagrange, *Œuvres*, III, p. 355.
2. Lagrange, *Œuvres*, III, p. 403.

Le but que Lagrange s'était proposé tout d'abord était la recherche de fonctions des racines de l'équation donnée qui soient telles que l'équation ou les équations dont elles seront les racines — et que l'on appelle *équations résolvantes* — se trouvent d'un degré moindre que l'équation donnée, ou soient décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là ; il faut en outre que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées. La première question générale qui se pose est donc la détermination des équations et des fonctions résolvantes [1]. Nous adopterons dans ce qui va suivre la notation de Lagrange, c'est-à-dire que nous représenterons par $f[(x')(x'')]$ une fonction rationnelle de x' et de x'', et par $f[(x', x'')]$ une fonction symétrique de x' et de x''. Considérons avec Lagrange [2] le cas le plus simple, celui de l'équation du deuxième degré, soit

$$x^2 + mx + n = 0 \tag{4}$$

cette équation. Une fonction rationnelle des racines aura la forme $t = f[(x')(x'')]$, t sera l'inconnue de l'équation résolvante que l'on désignera par $\theta = o$. Bornons-nous à donner la conclusion du raisonnement de Lagrange. L'équation $\theta = o$

1. Est-il nécessaire de mettre le lecteur en garde contre la double acceptation du mot résolvante ? Tantôt ce terme désigne une équation (c'est l'acception générale), tantôt une fonction.

2. Lagrange, *ibid.*, p. 359.

qui doit servir à déterminer la fonction $f[(x')(x'')]$ est du second degré et ses deux racines sont $f[(x')(x'')]$ et $f[(x'')(x')]$. Comme les racines x' et x'' sont déterminées de la même manière par l'équation (4), il est évident que les deux fonctions $f[(x')(x'')]$ et $f[(x'')(x')]$ qui ne diffèrent entre elles que par l'*échange des racines* x' et x'' devront aussi être déterminées par une même équation. Dans le cas où la fonction $f[(x')(x'')]$ serait symétrique, où l'on aurait

$$f[(x')(x'')] = f[(x'')(x')],$$

alors

$$\theta = [t - f[(x', x'')]]^2$$

et l'équation résolvante $\theta = o$ se réduit au premier degré :

$$t - f[(x', x'')] = 0.$$

Nous voyons sur cet exemple élémentaire, en germe pour ainsi dire, les deux principes fondamentaux qui vont transformer l'algèbre. Le premier consiste dans l'*échange* qu'on opère entre les deux racines x' et x'' qui interviennent de la même manière dans l'équation donnée. Déterminer, en général, comme nous le verrons dans un instant, les échanges entre les n racines d'une équation de degré n, cela revient à opérer les permutations entre les n racines ; c'est le fond de cette analyse combinatoire à laquelle Lagrange faisait allusion. Mais le second principe n'est pas moins

essentiel, et il est mis en évidence par cet exemple simple. En considérant les fonctions des racines qui *ne varient pas* (cas où l'équation $f[(x')(x'')]$ est symétrique), qui restent *invariantes*, lorsqu'on procède aux échanges entre les racines, on parvient à simplifier l'équation résolvante (dans notre cas, on a une équation du premier degré au lieu d'une équation de second degré) ce qui est précisément le but que l'on a en vue. Échanges entre les racines, détermination des fonctions des racines qui ne varient pas quand on soumet les racines aux échanges, telles sont les deux bases de la théorie.

Après avoir examiné le cas de l'équation du second degré, passons avec Lagrange au cas général de n racines x', x'', x''',..., $x^{(n)}$. Nous représenterons une fonction rationnelle des racines par $f[(x'), (x''), (x''')...]$. Soit

$$\theta = o$$

la résolvante. En raisonnant comme dans le cas du second degré, on verrait que la quantité θ serait le produit d'autant de fonctions simples telles que

$$t - f[(x'), (x''), (x''')\dots]$$

qu'il y a de permutations possibles entre les racines x', x'',... $x^{(n)}$ et l'on sait par un théorème élémentaire d'analyse combinatoire que ce nombre est précisément $1 \times 2 \times 3 \dots \times n$, ce qui s'écrit $n!$

L'équation $\theta = o$ est donc de degré $n!$ en général. « Mais, s'il arrive que la fonction soit telle qu'elle ne reçoive aucun changement par quelqu'une ou quelques-unes des permutations, alors l'équation dont il s'agit s'abaissera à un degré moindre [1]. » Car si la fonction $f[(x')(x'')(x''')\ldots]$ conserve la même valeur lorsqu'on échange x' en x'', x'' en x''', et x''' en x', θ aura 2 racines égales, et l'on voit aisément de plus que les autres racines seront deux à deux égales, θ sera donc égale au carré T^2, et $\theta = o$ se réduira à $T = o$ de degré $\frac{n!}{2}$. Si la fonction $f[(x')(x'')(x''')\ldots]$ est telle qu'elle conserve la même valeur en faisant deux ou trois ou un plus grand nombre de permutations différentes entre les racines x', x'', x''', ..., les racines t', t'', t'''... de $\theta = o$ seront égales trois à trois, quatre à quatre, etc., de sorte que θ sera égale à T^3 ou à T^4, etc., et que $\theta = o$ se réduira à une équation dont le degré sera $\frac{n!}{3}$, ou $\frac{n!}{4}$ ou, etc. « D'une manière générale, il résulte de ce qui précède que pour trouver directement l'équation la plus simple $T = o$ par laquelle devra être déterminée une fonction quelconque donnée des racines x', x'', ..., il n'y aura qu'à chercher toutes les différentes valeurs que cette fonction peut recevoir par les permutations des quantités x', x'', x'''... entre elles, et, prenant

1. Lagrange, *Œuvres*, III, p. 370.

ces valeurs pour les racines de l'équation cherchée, on déterminera par leur moyen les coefficients de cette équation suivant les méthodes connues... Dès qu'on aura trouvé soit par la résolution de l'équation $T=o$, ou autrement, la valeur *d'une* fonction donnée des racines x', x'', ..., je dis qu'on pourra trouver aussi la valeur *d'une autre fonction* quelconque des mêmes racines, et cela, généralement parlant, par le moyen d'une équation simplement linéaire, à l'exception de quelques cas particuliers qui exigent une équation du second degré, ou du troisième degré, etc.... [1] ». Soient t et y deux fonctions des racines ; si elles sont telles que toutes les permutations entre les racines qui feront varier y fassent varier en même temps t, on pourra exprimer en général y au moyen de t et des quantités connues par une expression rationnelle. Si t et y sont telles que t conserve la même valeur par les permutations qui font varier y, alors on ne pourra trouver la valeur de y au moyen de t et des quantités connues qu'à l'aide d'une équation du deuxième degré, ou du troisième degré, etc., selon le nombre des valeurs de y qui répondent à une même valeur de t. Les coefficients des équations en y seront, en général, des fonctions rationnelles de t et des quantités connues. Ce qui importe, en définitive, c'est le calcul des racines de l'équation donnée : des considérations

1. Lagrange, *ibid.*, 374.

précédentes on pourra déduire les conditions nécessaires pour déterminer ces racines par une fonction de ces mêmes racines ; pour cela on remplacera la fonction y par la racine x dans les raisonnements précédents.

Appliquant ces résultats aux équations générales du troisième et du quatrième degrés, Lagrange va retrouver *a priori* la forme des fonctions résolvantes de ces équations, résolvantes qu'il avait construites *a posteriori* dans les deux premières parties de son mémoire par l'étude des méthodes employées par Tartaglia, Hudde, Ferrari, Descartes, etc. Bornons-nous à rappeler que la fonction résolvante de l'équation du troisième degré est, d'après la méthode de Lagrange :

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$

x', x'', x''' étant les racines de l'équation donnée et α, α^2 les racines cubiques imaginaires de l'équation $x^3 = 1$. Les permutations des racines sont au nombre de $1 . 2 . 3 = 6$. Donc l'équation résolvante qui admet les t', t'', ... t^{VI} pour racines devrait être du sixième degré. Le cube t^3 de la fonction résolvante ne peut prendre que deux valeurs distinctes par les substitutions de x', x'', x''' ; donc ce cube dépend d'une équation du second degré. On a donc une équation résolvante de degré inférieur au degré de l'équation donnée et le but est atteint. En ce qui concerne l'équation

du quatrième degré, on peut prendre comme fonction résolvante

$$t = x' - x'' + x''' - x^{\text{IV}}$$

que, pour maintenir l'analogie avec le cas du troisième degré, l'on peut écrire

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{\text{IV}}$$

α désignant la racine réelle -1 de l'équation $x^4 = 1$.

Cette dernière fonction résolvante peut prendre six valeurs distinctes par les permutations des racines, mais ces valeurs étant deux à deux égales et de signe contraire, l'équation résolvante s'abaisse au troisième degré.

Pouvait-on généraliser la méthode de Lagrange en employant une fonction résolvante

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} x^{(n)} \qquad (5)$$

où α est racine de l'équation $x^n = 1$? Nous savons aujourd'hui que les équations complètes de degré supérieur au quatrième ne sont pas résolubles par radicaux ; la méthode de Lagrange est donc inapplicable pour le cas général. Mais la considération des fonctions résolvantes de Lagrange de la forme (5) devait être très féconde ; elle devait, par exemple, permettre de résoudre cette classe importante d'équations d'ordre supérieur qu'on appelle équations *cycliques*, sur les propriétés desquelles nous reviendrons plus tard.

D'une manière générale, comme on ne pouvait résoudre par radicaux les équations *générales* de degré supérieur au quatrième, on allait s'attaquer à des classes particulières d'équations, celles pour lesquelles *il existe entre les racines des relations particulières*. Hudde, dans sa lettre *De reductione æquationum*, est probablement le premier qui ait envisagé le problème dans sa généralité. Il montre comment une équation peut être abaissée à un degré moindre lorsqu'il y a entre quelques-unes de ses racines une relation telle que leur somme, ou la somme de leurs produits deux à deux, ou, etc., est nulle ou égale à une quantité donnée. Gauss et Abel devaient étudier au point de vue de leur résolubilité par radicaux les équations dont les racines sont liées par certaines relations particulières. Si nous suivions complètement la marche historique nous devrions, avant d'aborder la théorie de Galois, étudier les travaux de Gauss et d'Abel sur ces classes d'équations pour lesquelles il existe entre les racines des relations particulières ; nous devrions aussi rappeler les théorèmes de Cauchy sur les substitutions qui sont essentiels dans l'histoire de la théorie des groupes. Ces travaux sont tous antérieurs à l'œuvre de Galois. Mais l'étude des équations à relations particulières entre les racines se trouve remarquablement simplifiée par le travail de Galois ; nous croyons donc plus simple de les envisager plus tard du point de vue de la

théorie des groupes. Nous allons maintenant, en nous servant de conceptions plus récentes, faire l'exposé critique des notions fondamentales nécessaires à l'intelligence de l'œuvre de Galois. Quelques-unes des notions que nous allons exposer dans le paragraphe suivant, ont été mises originairement en évidence par Galois lui-même. Mais, on sait que Galois est un génie abrupt ; il a fallu bien des commentaires pour saisir le sens profond de sa pensée. C'est pour cette raison que, pour faire l'exposition de ses idées principales, il nous a semblé que nous atteindrions plus rapidement notre but en ne suivant pas l'ordre historique, mais en exposant les notions fondamentales sous la forme que leur ont donnée les successeurs de Galois. Nous verrons ensuite dans un paragraphe postérieur comment on applique ces notions au problème *particulier* de la résolubilité des équations.

II

LES NOTIONS FONDAMENTALES

Notion de corps de nombres. — Chaque système de nombres réels ou complexes qui se reproduisent par addition, soustraction, multiplication, ou division (la division par zéro exceptée)

s'appelle un corps de nombres [1]. L'ensemble des nombres *rationnels* (nombres entiers et fractionnaires) constitue l'exemple le plus simple d'un corps de nombres; l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bi$ où a et b sont rationnels, et où i vérifie l'équation

$$i^2 + 1 = 0,$$

constitue aussi un corps qui contient les nombres rationnels et que l'on appelle un *corps quadratique*, parce que le coefficient i est racine d'une équation quadratique ; on peut aussi considérer comme corps l'ensemble des nombres *réels* et l'ensemble des nombres $a + bi$, a et b étant réels. L'idée de corps peut être généralisée et étendue à toutes les quantités sur lesquelles on peut effectuer les quatre opérations fondamentales.

Notion d'adjonction. — Soit C un corps de nombres et α une grandeur qui ne fait pas partie du corps, si l'on convient de regarder cette grandeur α comme connue, et qu'on la combine avec les éléments de C par les opérations fondamentales, on formera un corps de nombres étendu C′ qui comprendra le corps C : on dira que l'on *adjoint* la grandeur au corps C. Si l'on a adjoint une irrationnelle, on considérera désormais comme rationnelle toute quantité exprimée au moyen des

1. Lejeune-Dirichlet et Dedekind, *Zahlentheorie*, p. 434.

quantités connues et de la quantité adjointe. Soit par exemple R le corps des nombres rationnels et réels, si on lui adjoint le nombre $i = \sqrt{-1}$, on peut former le corps des nombres complexes $x + yi$ dans lesquels x et y sont rationnels : on représente généralement ce dernier corps par J.

Considérons un polynôme

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m = f(x),$$

si les coefficients de la fonction $f(x)$ appartiennent à un corps de nombres C, cette fonction sera dite contenue dans C.

Irréductibilité et décomposition. — La notion d'irréductibilité, dont nous avons déjà eu l'occasion de signaler le caractère fondamental dans le domaine arithmétique [1], a la même importance en algèbre. Mais maintenant ce seront les polynômes irréductibles qui joueront le rôle des nombres premiers (on retrouve ici des théorèmes analogues aux théorèmes fondamentaux de l'arithmétique sur la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, etc.). L'adjonction de quantités à un corps de nombres donne à la notion d'irréductibilité un caractère relatif. Un polynôme $f(x)$ est *irréductible* dans le corps C, C représentant par exemple le corps des nombres rationnels, s'il ne peut être décomposé en facteurs de degré inférieur

1. Voir p. 107.

dont les coefficients appartiennent à C ; il est réductible en C dans le cas contraire. Le polynôme $f(x)$ irréductible en C peut devenir réductible dans un corps plus étendu C′ déduit de C par une adjonction. Un polynôme d'une variable peut toujours, par des adjonctions convenables, être décomposé en un produit de facteurs linéaires qui eux sont irréductibles.

Nous pouvons considérer aussi des fonctions de *plusieurs* variables dans un corps C. Parmi ces fonctions il y en aura de réductibles et d'irréductibles. Mais ici se présente une circonstance nouvelle ; il existe, dans le cas de plusieurs variables, des fonctions de degré supérieur au premier et qui sont absolument indécomposables, par exemple la fonction $x^2 - y^3$, ou la fonction $x^2 + y^2 + 1$.

Si au lieu d'une fonction $f(x)$, on considère une équation

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

l'équation sera dite équation contenue en C, si la fonction $f(x)$ est une fonction contenue en C. Cette équation sera réductible ou irréductible suivant que $f(x)$ est réductible ou irréductible. Si l'on adjoint à C une racine α de l'équation précédente, le nouveau corps C′ est un *corps algébrique* supérieur à C. Ce corps se représente par C (α). Tout élément de C (α) se déduit de α et des éléments de C, par les opérations fondamentales. Si (1)

est réductible, elle admet un diviseur irréductible

$$f_1(x) = 0. \qquad (2)$$

Si α est une racine de (2), $f_1(x)$ étant de degré n, le corps $C(\alpha)$ est un corps algébrique de degré n. Les corps formés avec les autres racines de (2), $C(\alpha_1)$, $C(\alpha_2)$... sont les corps conjugués du corps $C(\alpha)$. Lorsqu'un corps est identique à tous ses conjugués, il s'appelle *corps normal* ou *corps de Galois*. Les propriétés de ces corps sont très simples. « Et, remarque H. Weber, les grands progrès que l'algèbre doit à Galois proviennent essentiellement de ce fait que des corps quelconques peuvent se ramener à des corps normaux [1]. »

Corps de nombres, adjonction, irréductibilité dans un corps, telles sont les premières notions fondamentales de l'algèbre, notions que nous avons déjà rencontrées à la base de l'arithmétique. Nous allons mettre en évidence maintenant une autre catégorie de notions élémentaires qui se rattachent au calcul combinatoire. Nous avons vu dans le premier paragraphe comment Lagrange avait été amené, à propos de la résolution des équations, à considérer tous les échanges que l'on pouvait faire entre les racines d'une équation, ce qui revenait dans le cas général à considérer toutes les permutations de ces racines

1. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 1re édit., I, 464.

entre elles. Pour passer d'une permutation à une autre permutation, on remplace les racines $x_1, \ldots x_n$ par les racines $x_{p_1}, \ldots x_{p_n}$, $p_1, \ldots, p_n$ désignant une permutation de $1, 2, \ldots, n$; le passage d'une permutation à une autre permutation s'appelle une *substitution*. Or, ces substitutions possèdent des caractères généraux qui les font rentrer dans la théorie des groupes d'opérations : le mot opération étant pris dans le sens le plus général. On sait qu'un ensemble d'opérations forme un groupe si le résultat de la composition (produit) de deux d'entre elles appartient à l'ensemble et si l'inverse d'une opération de l'ensemble y est également compris. La notion de groupe d'opérations est très générale, c'est un genre qui comprend de nombreuses espèces, par exemple : le groupe des transformations continues à un ou plusieurs paramètres de la forme $x'_i = f_i\ (x_1, x_2, \ldots x_n, a, b, c,)$ pour $i = 1, 2, \ldots n$, les f_i étant des fonctions analytiques et indépendantes les unes des autres ; le groupe des substitutions linéaires, etc. Le groupe des transformations continues constitue l'objet de l'analyse, nous n'avons pas ici à nous en occuper. Mais le groupe des substitutions linéaires va nous intéresser particulièrement parce que, comme nous le montrerons plus tard, le groupe des permutations que nous avons rencontré dans la théorie de la résolution des équations algébriques est un cas particulier du groupe des substitutions linéaires. A

la notion de groupe d'opérations se trouve liée la notion également fondamentale de fonction *invariante*, c'est-à-dire de fonction qui ne change pas par les opérations du groupe. Pour la construction des équations résolvantes, nous avons vu, dans la théorie de Lagrange, combien ces invariants étaient essentiels : ils vont jouer un rôle de plus en plus prépondérant en ce sens qu'ils vont devenir les éléments caractéristiques des groupes.

Nous avons donc mis en évidence deux catégories de notions élémentaires, les notions proprement arithmétiques et celles qui se rattachent à l'idée de groupes d'opérations, idée issue du calcul combinatoire (les premières substitutions linéaires que l'on ait étudiées étant les permutations). Or, Galois, dans la théorie de la résolubilité des équations, développant l'idée de Lagrange, a montré la liaison qui existe entre les notions arithmétiques et les notions combinatoires.

Sans entrer dans les détails de la doctrine, nous allons maintenant caractériser les notions fondamentales qui sont à la base de la *théorie des groupes de substitutions*.

La décomposition des groupes. — La notion de décomposition en éléments irréductibles, dont nous avons déjà signalé l'importance, s'applique également ici. Nous allons trouver des groupes simples et des groupes composés ; nous aurons une décomposition des groupes en facteurs. (Dans ce

qui va suivre nous aurons principalement affaire aux groupes finis, c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'éléments).

Représentons le groupe P par la suite de ses éléments (les substitutions du groupe)

$$P = 1, \pi_1, \ldots\ldots, \pi_{n-1};$$

l'ordre du groupe est égal au nombre de ses substitutions, son *degré* est le nombre de ses lettres.

Soit

$$Q = 1, \pi_1, \ldots\ldots, \pi_{\nu-1}$$

un système d'éléments contenus dans P ; si ce système forme un groupe, on dit qu'il est un *diviseur* ou un *sous-groupe* de P. Si ν est l'ordre du sous-groupe, n l'ordre du groupe P, $\frac{n}{\nu} = i$ s'appelle l'*indice* du sous-groupe par rapport au groupe. Si Q est un sous-groupe de P, on démontre que l'ordre de Q est un diviseur de l'ordre de P.

Nous savons que lorsqu'une fonction φ reste invariable par les opérations d'un groupe, on dit qu'elle est un invariant du groupe ou qu'elle appartient au groupe; si elle varie par toute opération non-comprise dans le groupe elle est un invariant caractéristique du groupe. Or, si φ est un invariant caractéristique du diviseur Q, φ se transforme par les opérations de P en $i - 1$ fonctions φ_j. Ces fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots\varphi_{i-1}$ s'appellent fonctions associées de φ, les groupes auxquels elles appartiennent

s'appellent[1] des *diviseurs conjugués* de P. Si tous les diviseurs conjugués de *P* sont identiques, une opération quelconque π non comprise dans le sous-groupe Q et combinée avec Q donne un sous-groupe identique à Q ; alors Q est dit un *sous-groupe invariant*. Un groupe qui n'admet d'autre sous-groupe invariant que lui-même et le groupe identique (celui qui ne change rien) s'appelle un *groupe simple*. Un groupe est *composé* lorsqu'il admet des sous-groupes invariants autres que lui-même. Un sous-groupe invariant tel qu'il n'existe pas de sous-groupe plus grand que lui s'appelle un sous-groupe maximum. Si P_1 est un sous-groupe maximum de P, P_2 un sous-groupe maximum de P_1, etc., la suite des groupes

$$P, P_1, P_2, \ldots\ldots, 1 \qquad (I)$$

qui se termine par l'unité, s'appelle une *suite de composition*[2] du groupe P. Nous désignerons par $n, n_1, \ldots 1$ les ordres des groupes de la suite (I) et par $\nu, \nu_1, \ldots$ les quotients $\frac{n}{n_1}, \frac{n_1}{n_2}, \ldots$, c'est-à-dire les indices de P_1 par rapport à P, de P_2 par rapport à P_1, etc.

La suite

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots\ldots$$

s'appelle la *suite des indices* du groupe P. Les

1. Weber, *loc. cit.*

2. Weber, *loc. cit.*, II, 17.

sous-groupes invariants P_1, P_2,... peuvent, en général, être choisis de diverses façons. Mais nous savons par un théorème[1] de M. Jordan que, de quelque façon que soit choisie la suite de composition d'un groupe P, la suite des indices est, abstraction faite de l'ordre, toujours la même.

Notion de transitivité. — Un groupe de substitutions est dit *transitif* lorsqu'il contient au moins une opération qui transforme une lettre quelconque en une autre lettre quelconque ; si, au contraire, les lettres peuvent se partager en plusieurs systèmes tels qu'aucune opération ne transforme une lettre de l'un des systèmes en une lettre de l'autre, le groupe est *intransitif*.

Notion de primitivité. — Un groupe transitif est dit *non primitif*[2], lorsque les lettres x_1, x_2,... x_n peuvent être réparties en systèmes contenant le même nombre de lettres, et que dans toutes les substitutions du groupe les lettres de chaque système soient remplacées par les lettres d'un même système : de la sorte, toutes les substitutions du groupe résulteront de déplacements d'ensemble entre les systèmes, considérés chacun comme tout d'une pièce, combinés avec des déplacements convenables opérés en même temps dans l'intérieur de chaque système entre les lettres qui le composent.

1. Jordan, *Traité des Substitutions*, p. 42.
2. Jordan, *ibid.*, p, 34.

Les groupes qu'on ne peut partager en de pareils systèmes s'appellent *groupes primitifs*.

Donnons encore quelques définitions : Deux groupes sont dits *holoédriquement isomorphes*, lorsqu'on peut établir entre les éléments de l'un et les éléments de l'autre une correspondance univoque et réciproque telle qu'au produit de deux éléments quelconques d'un groupe corresponde le produit des deux éléments correspondants pris dans le même ordre de l'autre groupe. Deux groupes sont *mériédriquement isomorphes*, lorsqu'à un élément du premier correspond un élément du second et qu'à un élément du second correspondent n éléments du premier.

Nous nous sommes placé jusqu'à présent au point de vue général. Nous allons maintenant caractériser brièvement des groupes *particuliers* qui vont jouer dans la théorie de la résolubilité des équations un rôle capital.

Groupe des permutations cycliques : soient les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on obtient une permutation cyclique, si dans une disposition quelconque des indices 1, 2, 3,... ..., n, on remplace chaque indice par le suivant et le dernier par le premier : on recommence l'opération jusqu'à ce qu'on retrouve la disposition primitive. Le groupe composé des puissances [1] d'une permutation cyclique s'appelle le groupe cyclique.

1. On appelle *puissances* d'une permutation les résultats de la composition répétée d'une permutation avec elle-même.

Groupe abélien : si l'on suppose que les permutations d'un groupe vérifient la loi commutative

$$p_1 p_2 = p_2 p_1$$

le groupe est dit abélien; le groupe cyclique est abélien.

Groupe métacyclique (appelé aussi groupe résoluble) : Un groupe de permutations P, tel qu'on puisse former une *suite de composition* (au sens indiqué plus haut)

$$P, P_1, \ldots\ldots, 1,$$

chaque terme de cette suite étant un sous-groupe invariant d'indice premier du précédent, s'appelle *groupe métacyclique*.

Indiquons en terminant que le problème général de la théorie des groupes, qui consisterait à former tous les groupes de substitutions de n lettres, n'est pas résolu en général. Cayley a donné des résultats intéressants pour les degrés inférieurs[1].

III

THÉORIE DE GALOIS CONCERNANT LA RÉSOLUBILITÉ DES ÉQUATIONS.

Nous possédons maintenant les notions nécessaires pour aborder l'exposé élémentaire de la théorie de Galois.

1. Cayley, *Mathematical papers*, II, 125 et Weber, *loc. cit.*, II, 115.

D'une manière générale on peut dire que la théorie des groupes va éclairer les procédés de résolution des équations algébriques. La conception de Galois est la suivante : il définit un groupe de permutations des racines qui caractérise l'équation donnée ; il définit de plus une certaine équation résolvante. Puis, utilisant la notion *d'adjonction*, il adjoint des quantités simples au corps C de l'équation dans lequel la résolvante est irréductible. Alors si la réduction est possible, la résolvante devra se décomposer et le degré du groupe devra être abaissé après l'adjonction. On adjoindra successivement des quantités jusqu'à ce que la résolvante soit ramenée au premier degré et que le groupe soit réduit au groupe identique ; l'équation donnée sera alors résolue. Il nous suffit, tout d'abord, pour faire connaître les rouages principaux de la théorie de Galois, de caractériser ce que Galois appelle *groupe* de l'équation et *résolvante* de l'équation. Ce groupe et cette résolvante s'appellent le groupe de Galois et la résolvante de Galois.

Considérons une équation $F(x) = o$ dont les coefficients appartiennent à un corps C, et soient x_1, x_2, x_3,... ses racines. Nous avons vu par les travaux de Lagrange qu'il fallait considérer dans la formation des équations résolvantes, les échanges entre les racines et les fonctions que ces échanges laissent invariables ; la proposition suivante que

nous donnons d'après le texte de Galois n'est plus faite pour nous surprendre.

Théorème[1]. — Soit une équation donnée dont x_1, x_2, x_3,... sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des racines x_1, x_2, x_3,... qui jouira de la propriété suivante :

1° Que toute fonction des racines, invariable par les substitutions du groupe, soit rationnellement connue (*est un élément du corps* C *de l'équation*).

2° Réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par les substitutions.

Le groupe ainsi déterminé est le groupe de l'équation $F(x) = o$. Dans le groupe symétrique (comprenant les $1.2.3... m$ permutations des m racines) les fonctions déterminables rationnellement sont les fonctions symétriques élémentaires : somme des racines, somme des produits deux à deux, etc.

Avant de définir la résolvante de Galois, définissons ce qu'on entend par *équation normale*. On appelle équation normale une équation irréductible dont les racines s'expriment rationnellement en fonction de l'une d'entre elles.

Une équation $g(t) = o$ est une résolvante de Galois d'une équation donnée $F(x) = o$, quand elle possède les propriétés suivantes :

1° $g(t)$ est irréductible ;

1. Galois, *Œuvres*, p. 38.

2° Toutes les racines de F (x) peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'une racine ρ de $g(t)$;

3° Une racine de g (t) peut s'exprimer rationnellement en fonction des racines de F (x).

Soient t une racine de la résolvante, x_1, x_2,... x_m les m racines de la proposée, on prendra, à l'exemple de Galois, pour t la valeur

$$t = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_mx_m.$$

D'après cela on voit, en vertu d'un théorème élémentaire sur les permutations, que la valeur maxima du degré de la résolvante sera 1.2.3... m.

Nous allons introduire maintenant une notion due à Kronecker qui nous permettra de caractériser clairement la marche des idées de Galois. Lorsque le degré de la résolvante de Galois d'une équation de degré m atteint sa valeur maxima, on dit que l'équation n'a point *d'affect*[1]. Elle a un affect d'autant plus grand que le degré μ de la résolvante de Galois est plus petit. Le quotient $\frac{m!}{\mu}$ est toujours un nombre entier au plus égal à $m!$ et au moins égal à 1, on l'appelle *le degré de l'affect*. Quand l'affect atteint sa valeur maxima $m!$ la résolvante de Galois est alors du premier degré, sa racine s'exprime donc rationnellement en fonction des quantités connues (elle fait partie du corps C

1. H. Weber, *Algèbre supérieure*, trad. Griess, I, 555.

auquel appartiennent les coefficients de l'équation donnée) et en vertu du deuxième caractère de la résolvante de Galois les racines de la proposée font elles-mêmes partie du corps C auquel appartient l'équation proposée. Les racines de cette équation s'exprimant au moyen des quantités connues (les coefficients) l'équation peut être considérée comme résolue.

Lorsque la résolvante de Galois, n'étant pas du premier degré, devient réductible par l'adjonction au corps C d'une quantité algébrique, on trouve une résolvante de degré plus petit, et l'affect de l'équation $F(x) = o$ augmente. Donc pour Galois le problème de la résolution d'une équation $F(x) = o$, consiste à diminuer progressivement le groupe par l'adjonction successive de quantités algébriques. De cette façon on élève l'affect et l'on poursuit le procédé jusqu'à ce que l'affect atteigne sa plus grande valeur. Galois a d'ailleurs parfaitement mis en relief les principes de sa théorie dans le mémoire que nous avons déjà cité (*proposition V* [1] : dans quels cas une équation est-elle soluble par de simples radicaux ?)

« J'observerai d'abord, remarque Galois, que pour résoudre une équation, il faut successivement abaisser son groupe jusqu'à ne plus contenir qu'une seule permutation. Car, quand une équation est

1. Galois, *Œuvres*, p. 42.

résolue, une fonction quelconque de ses racines est connue, même quand elle n'est invariable par aucune permutation. Cela posé, cherchons à quelles conditions doit satisfaire le groupe d'une équation pour qu'il puisse s'abaisser ainsi par l'adjonction de quantités radicales... Considérons comme opérations distinctes l'extraction de chaque racine *de degré premier*. *Adjoignons* à l'équation le premier radical... après un certain nombre *fini* d'extractions de racines, le groupe devra se trouver diminué, sans quoi l'équation ne serait pas soluble... Supposons que par une extraction de racine de degré premier p, on diminue le groupe de l'équation... le groupe de l'équation devra se décomposer en p groupes jouissant les uns par rapport aux autres de cette double propriété :

1° Que l'on passe de l'un à l'autre par une seule et même substitution.

2° Que tous contiennent les mêmes substitutions (*ces sous-groupes sont des sous-groupes invariants*). Je dis réciproquement que si le groupe de l'équation peut se partager en p groupes qui jouissent de cette double propriété, on pourra par une simple extraction de cette racine p^{ieme} et par l'adjonction de cette racine p^{ieme}, réduire le groupe de l'équation à l'un de ces groupes partiels... » On poursuivra les adjonctions jusqu'à la résolution. On remarquera certainement que la notion de sous-groupe invariant que nous avons caractérisée dans

le dernier paragraphe joue dans les considérations de Galois un rôle essentiel. On peut résumer la doctrine de Galois concernant la résolubilité par radicaux sous la forme suivante :

Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'il existe une suite de groupes

$$P, P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, 1$$

dont le premier, P, est le groupe de Galois de l'équation, le dernier le groupe unité, et tels que chaque groupe soit un sous-groupe invariant d'indice premier de celui qui le précède immédiatement[1].

Exemple de résolubilité. — Soit à résoudre l'équation complète du quatrième degré. Le groupe de l'équation comprend $1.2.3.4 = 24$ permutations. Adjoignons le radical $\sqrt{D}$, D étant le discriminant de l'équation donnée, discriminant que l'on sait calculer. Par cette adjonction, ainsi qu'on peut le vérifier, le groupe primitif est réduit à un sous-groupe invariant de 12 permutations soit P_1 ; ce sous-groupe étant d'ordre 12 est d'indice 2. Ce sous-groupe P_1 admet un sous-groupe invariant P_2 d'ordre 4 et par suite d'indice 3. Cherchons une fonction ψ qui appartienne au sous-groupe P_2, l'adjonction de cette fonction réduira le sous-groupe P_1 au sous-groupe P_2 ; de plus, en vertu des principes généraux, cette fonction ψ est racine d'une

1. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, I, 598.

équation résolvante du troisième degré (degré égal à l'indice 3 du groupe P_2 par rapport au groupe P_1). Ainsi l'adjonction d'un radical du troisième degré réduira le sous-groupe invariant P_1 au sous-groupe invariant P_2 de quatre permutations. Ce sous-groupe, à son tour, admet un sous-groupe invariant de deux permutations, P_3, qui est d'indice 2 par rapport au précédent. Par l'adjonction d'une racine carrée, on réduit le sous-groupe P_2 au sous-groupe P_3 ; il faudra encore une racine carrée pour résoudre l'équation. On voit que les équations générales du quatrième degré admettent le critérium donné plus haut ce qui explique leur résolubilité par radicaux.

Exemple de non-résolubilité. — Soit l'équation complète du cinquième degré. Ici l'on a affaire au groupe de permutations de cinq indices. Dans ce cas, le groupe *alternant* de degré 60 (dont les fonctions caractéristiques sont invariantes pour les permutations qui se décomposent en un nombre pair de transpositions) qui est le premier sous-groupe invariant, est *simple*, c'est-à-dire n'admet pas d'autre sous-groupe invariant que l'unité : le critérium de résolubilité n'est pas vérifié et, par suite, l'équation générale du cinquième degré n'est pas résoluble par radicaux ; il en serait de même pour toute équation générale de degré supérieur au quatrième. Abel avait, antérieurement aux travaux de Galois, établi ce résultat dont l'importance est considérable ;

mais sa démonstration est longue, tandis que la démonstration du point de vue de Galois résulte immédiatement des principes généraux.

Nous devons encore donner quelques indications générales sur la manière dont M. Jordan, dans son *Traité des substitutions*[1], a posé le problème de la résolubilité. Au lieu de résoudre l'équation donnée au moyen de radicaux, on cherchera à la résoudre par des racines d'équations *abéliennes*, ce qui au fond revient au même, mais permet de simplifier le problème.

On dit qu'une équation est *abélienne*, lorsque chacune de ses racines s'exprime rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles, et si ces racines se formulant par

$$\alpha_1 = \theta_1(\alpha), \qquad \alpha_2 = \theta_2(\alpha), \; \ldots\ldots$$

on a pour deux expressions quelconques de cette suite

$$\theta_H \theta_K(\alpha) = \theta_K \theta_H(\alpha)$$

Une équation est dite *cyclique*, si son groupe se compose d'un seul cycle et de ses répétitions (voir le paragraphe II). Les équations cycliques sont un cas particulier des équations abéliennes. Les équations binômes sont des équations abéliennes. On démontre que toutes les équations abéliennes peuvent être résolues à l'aide d'une suite d'équations

1. Jordan, *loc. cit.*, p. 385 et suiv.

cycliques de degré premier, et que ces dernières sont résolubles par radicaux. Donc, au lieu de se demander à quelles conditions le groupe d'une équation devient réductible par des adjonctions de radicaux, racines d'équations binômes, on se demandera à quelles conditions ce groupe se réduit par l'adjonction de racines d'équations cycliques de degré premier. On appelle *métacyclique* [1] une équation dont la résolution se ramène à celle d'une suite d'équations cycliques ; les équations métacycliques sont équivalentes, d'après ce que nous avons dit, aux équations résolubles par radicaux. La condition, pour qu'une équation soit métacyclique, est qu'il existe une *suite de composition* [2]

$$P, P_1, P_2, \ldots\ldots, 1$$

P étant le groupe de Galois de l'équation.

Signalons encore les résultats suivants dus à Galois : le groupe d'une équation métacyclique irréductible de degré premier est *linéaire* [3] et réciproquement ; — lorsqu'une équation irréductible de degré premier est métacyclique ses racines sont des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles.

Nous ne pouvons entrer dans plus de détails

1. Weber, *Algèbre superieure*, trad. Griess., I, 695.

2. Voir plus haut p. 167.

3. On appelle groupe linéaire le groupe formé par les substitutions de la forme $(z, az + b)$.

pour lesquels nous renvoyons aux traités spéciaux. Nous avons, croyons-nous, suffisamment caractérisé les idées générales qui sont à la base de la théorie de Galois.

IV

EXTENSION DE LA NOTION DE RÉSOLUBILITÉ : HERMITE, KRONECKER, BRIOSCHI, GORDAN

Dans les travaux que nous avons étudiés jusqu'à présent, le problème de la résolution d'une équation algébrique consiste à chercher à exprimer ses racines par des radicaux, ou se ramène à un problème équivalent à celui-là. Or, nous avons vu que les algébristes avaient rencontré un obstacle insurmontable : la route était barrée. A partir du cinquième degré, on ne pouvait plus résoudre par radicaux les équations générales : on ne pouvait, au delà du quatrième degré, résoudre que des types particuliers d'équations, celles pour lesquelles il existe entre les racines des liaisons particulières. Par suite, on se trouvait devant l'alternative suivante : ou bien renoncer à aborder l'étude des équations algébriques générales d'ordre supérieur ou bien modifier le sens des mots *résoudre l'équation*. La science ne pouvait sans contredire sa loi propre, la loi du progrès, accepter la première branche de l'alternative.

Tout ce que l'on savait des racines de l'équation

générale du cinquième degré jusque vers l'année 1858, c'est qu'elles ne pouvaient se représenter par des radicaux, mais c'était là en somme une constatation négative. Ne pouvait-on chercher à savoir quelque chose de plus sur la forme et la nature de ces racines ? Il fallait évidemment pour cela avoir recours à des éléments analytiques nouveaux. Hermite, dans son mémoire de 1858 [1], a indiqué comment on pouvait sortir de l'impasse où l'algèbre semblait acculée. « On peut, ainsi que l'exemple en a été donné dans le troisième degré, chercher, en introduisant des variables auxiliaires, à obtenir les racines séparément exprimées par autant de *fonctions distinctes* et uniformes relatives à ces nouvelles variables [2]. » Ainsi, résoudre l'équation consistera à séparer les racines, et à représenter ces racines par des fonctions uniformes exprimables par des séries convergentes qui permettront de les calculer.

Hermite a appliqué ces idées à l'équation du cinquième degré. Pour exposer sa théorie nous allons être obligé d'entrer dans des détails plus techniques ; aussi, le lecteur peu familiarisé avec la théorie des fonctions elliptiques, pourra passer les deux pages qui vont suivre ; nous venons de dégager le principe général qui domine les travaux d'Hermite, et la connaissance de ce principe peut suffire à la rigueur au lecteur philosophe.

1. Hermite, *Œuvres*, II, 5.
2. Hermite, *Œuvres*, II, 6.

On sait que si dans l'équation du troisième degré

$$x^3 - 3x + 2a = 0 \qquad (1)$$

on fait $a = \sin\alpha$, les trois racines se séparent en trois fonctions[1]

$$2\sin\frac{\alpha}{3}, \qquad 2\sin\frac{\alpha+2\pi}{3}, \qquad 2\sin\frac{\alpha+4\pi}{3}\cdot$$

On sait aussi que l'équation générale du cinquième degré peut toujours, par la transformation de Tschirnhaus et avec l'aide d'une racine carrée, se ramener à la forme *normale*, c'est-à-dire à l'équation du cinquième degré ne contenant plus de termes du quatrième et du troisième degrés; et cette dernière équation peut par les transformations de Bring-Jerrard se mettre sous la forme

$$x^5 - x - A = 0 \qquad (2)$$

c'est-à-dire sous la forme d'une équation avec un seul paramètre. Or l'idée d'Hermite a été de rapprocher les équations (1) et (2) et d'introduire pour l'équation (2) des transcendantes elliptiques, de même que dans le cas de l'équation (1), on avait introduit des transcendantes trigonométriques.

C'est l'équation modulaire de Jacobi[2] qui sert

1. Hermite, *ibid.*, II, 6 : voir pour ce calcul élémentaire : Weber, *Lehrbuch der Algebra*, I, 349.

2. u étant la racine quatrième du module de l'intégrale elliptique $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$ et v la racine quatrième du module résultant de la transformation du cinquième ordre, rappelons que l'équation modulaire de Jacobi est :

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = o$$

de trait d'union entre l'équation du cinquième degré et la théorie des fonctions elliptiques. Sans entrer dans les calculs, indiquons le principe de la méthode d'Hermite. Elle repose sur ce fait signalé par Galois que les équations modulaires, dans le cas où l'ordre de la transformation n est égal à 5, 7 ou 11, sont susceptibles d'être abaissées d'un degré. Hermite construit la réduite du cinquième degré, correspondant à l'équation modulaire de Jacobi du sixième degré, par la considération d'une certaine fonction $\Phi(\tau)$ [1]. La réduite du cinquième degré en Φ se ramène par une substitution convenable [2] à la forme de Bring-Jerrard

$$x^5 - x - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1+\varphi^8(\tau)}{\varphi^2(\tau)\psi^4(\tau)} = 0,$$

où $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{K}$, $\psi(\tau) = \sqrt[4]{K'}$, K et K′ étant le module et le complément du module de l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

τ étant le rapport des périodes. Pour exprimer les racines de l'équation

$$x^5 - x - A = 0$$

en fonction de Φ, on déterminera $\varphi(\tau)$ par la condition

$$A = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1+\varphi^8(\tau)}{\varphi^2(\tau)\psi^4(\tau)}.$$

1. La fonction $\Phi = (v_\infty - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)$, les v étant racines de l'équation modulaire.
2. Hermite, *Œuvres*, II, p. 10.

K et τ ayant été déterminés, on obtiendra finalement — et ce résultat seul nous intéresse — une représentation des cinq racines de l'équation de Bring-Jerrard par cinq fonctions uniformes distinctes qui permettront le calcul rapide de ces racines[1]. Donc la méthode d'Hermite, en permettant la résolution de l'équation de Bring-Jerrard par les fonctions elliptiques, contient la résolution de l'équation générale du cinquième degré, puisqu'on peut toujours ramener l'équation générale au type de Bring-Jerrard.

La marche de Kronecker pour obtenir la résolution de l'équation du cinquième degré est, en un sens, inverse de celle d'Hermite. Kronecker montre que l'on peut tirer de l'équation générale du cinquième degré, après l'adjonction de la racine carrée du discriminant, des résolvantes du sixième degré qui se confondent avec l'équation modulaire du sixième degré de Jacobi. On peut ensuite par des transformations convenables ramener cette dernière équation du sixième degré à la forme normale avec un paramètre ; l'équation sous cette forme se résoudra enfin par les fonctions elliptiques[2]. Dans son travail de 1861[3], Kronecker présente

1. Pour préciser les idées, donnons d'après Hermite l'une des cinq fonctions représentatives soit : $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \dfrac{\Phi(\tau)}{\varphi(\tau)\,\psi^4(\tau)}$.

2. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1858, t. XLVI, et Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 153.

3. *Borchardt Journal*, t. LIX, et Klein, *loc. cit.*, p. 156.

une distinction que M. Klein reprendra. Il distingue dans les opérations de résolution deux parties, la partie *algébrique*, qui comprend les opérations algébriques ayant pour but de ramener l'équation générale au type normal, et la partie *transcendante* qui ne touche qu'au calcul des racines ; calcul qui se fait par les procédés analytiques. Les travaux de Brioschi et de Gordan [1], quelle que soit leur valeur technique, ne nous paraissent pas, au point de vue des principes généraux, présenter un intérêt suffisant pour que nous nous efforçions d'en dégager ici les idées fondamentales.

V

INDICATIONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR : TRAVAUX DE M. JORDAN ET DE M. KLEIN.

Nous arrivons enfin à la théorie générale de la résolution des équations algébriques dont les principes fondamentaux ont été primitivement formulés par Lagrange et Galois. Cette théorie a été élargie ensuite, comme nous l'avons vu, au contact des théories analytiques (travaux d'Hermite et de

1. Il faut mentionner aussi les travaux de Betti sur les équations modulaires. Ce mathématicien semble être le premier qui ait *publié* une démonstration de la proposition de Galois sur la réduction du degré des équations modulaires, proposition rappelée plus haut.

Kronecker) puis systématisée et généralisée par M. Jordan et M. Klein. C'est sur la théorie des substitutions linéaires que la théorie de la résolution des équations est fondée. L'étude des substitutions linéaires constitue donc l'introduction nécessaire à la théorie générale des équations.

On sait qu'on entend par *substitution linéaire* de n variables un système d'équations qui expriment linéairement les variables y au moyen des variables x

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots\ldots + a^1 x_n \\ y_2 &= a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots\ldots + a_n^2 x_n \qquad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \ldots\ldots + a\ x_n. \end{aligned}$$

Le nombre des variables constitue le nombre des *dimensions* de la substitution ; selon qu'il y a deux, trois, ... variables, la substitution est binaire, ternaire, ... Les propriétés générales de ces substitutions font partie des éléments de l'algèbre ; nous les supposerons connues.

L'ensemble des substitutions linéaires de dimensions données forme un groupe. Nous avons déjà fait remarquer que les groupes de substitutions linéaires ont eu pour origine les groupes de permutations de lettres que nous avons déjà rencontrés au cours de cette étude. Ici s'applique cette loi du *renversement* que nous avons signalée antérieurement. La théorie générale des substitutions linéaires

est sortie historiquement des permutations, mais renversant l'ordre historique, on peut logiquement considérer les groupes de permutations comme un cas particulier des groupes de substitutions linéaires, le cas où le déterminant du système (1) est tel que dans chaque ligne et dans chaque colonne, il n'y ait qu'un terme différent de zéro et que ce terme soit l'unité. Puisque le groupe des permutations de n lettres n'est qu'un cas particulier des groupes de substitutions linéaires, c'est sur ces dernières que l'on devra chercher à fonder la théorie générale des équations. Nous devons faire connaître une autre forme des substitutions linéaires : les substitutions *linéaires fractionnaires*. Considérons la substitution binaire

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \\ y_2 &= a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 \end{aligned}$$

et posons

$$\frac{y_1}{y_2} = \eta \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2} = \zeta$$

nous aurons

$$\eta = \frac{a_1^1 \zeta + a_2^1}{a_1^2 \zeta + a_2^2} \cdot$$

Les *invariants* des groupes vont jouer un rôle fondamental. Il est facile de montrer que pour un groupe fini (c'est-à-dire contenant un nombre fini de substitutions), il existe des formes invariantes. En effet, si $\varphi(x)$ représente une forme quelconque des variables et si A, B, C,....., L sont les substi-

tutions du groupe, une fonction symétrique Φ de $\varphi[A(x)]$, $\varphi[B(x)]$,..... $\varphi[L(x)]$, est évidemment invariante pour les substitutions du groupe. On démontre en général, en s'appuyant sur une proposition de M. Hilbert [1], que toute forme invariante peut être représentée au moyen d'un nombre fini d'invariants du groupe (base). Il faudra donc chercher tout d'abord le système complet de ces formes invariantes

$$F_1, F_2, \ldots\ldots, F_p$$

au moyen desquelles toutes les autres formes peuvent être représentées. Entre ces formes, il existera certaines identités qu'il faudra établir.

« Nous nous représenterons [2] maintenant les valeurs des F comme n'étant pas soumises à d'autres conditions qu'à vérifier ces identités. Chercher à calculer les variables x_1, x_2,...,. x_n au moyen des valeurs de ces formes, c'est formuler le problème des formes invariantes (*Formenproblem*) qui correspond à notre groupe..... S'agit-il de résoudre une équation de degré n, $f(x) = o$ (*ce qui constitue le problème général de l'algèbre tel que nous l'avons énoncé au début de cette étude*), nous pouvons poser le problème sous la forme d'un problème des formes (*Formenproblem*) pour les n variables x_1, x_2,... x_n, qui sont les racines de l'équa-

1. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, II, 165.
2. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 123.

tion donnée. Le groupe des substitutions linéaires correspondantes se compose simplement des permutations des x qui constituent le groupe de Galois de l'équation. Les formes F coïncident avec le système complet des fonctions entières des x, qui, au sens de la théorie de Galois, sont connues rationnellement. Ces remarques ne changent rien tout d'abord au contenu de la théorie des équations. Mais les propositions qui la constituent vont acquérir un ordre nouveau. » Les problèmes les plus simples sont ceux où les substitutions linéaires auxquelles on a affaire ont le plus petit nombre de variables. Réduire un problème au problème avec un nombre minimum de variables s'appelle d'après M. Klein le ramener au *problème normal*.

Par suite en classant les problèmes par ordre de simplicité, on rencontrera d'abord ceux qui se rapportent aux groupes de substitutions homogènes d'une dimension ; ces substitutions sont de la forme

$$x' = \alpha x$$

et comme elles doivent constituer un groupe fini de degré m, les α sont des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Le groupe a un invariant absolu x^m, et si la valeur de cet invariant est donnée, on obtient x par une extraction de racine $m^{\text{ième}}$. Les équations binômes, de même que les équations du deuxième, troisième et quatrième degrés, sont résolubles par des problèmes des formes (*Formenproblem*) à une dimen-

sion. L'équation du cinquième degré, comme l'a montré M. Klein, se ramène à un problème binaire. M. Klein a encore établi que pour les équations du septième degré, le problème des formes correspondant est un problème quaternaire.

Nous avons vu que la résolution d'une équation générale de degré n peut se ramener à un problème des formes à n dimensions. Alors on doit se demander si, pour les équations complètes de degré supérieur au septième, une réduction au problème normal, dans le sens où nous venons de le caractériser, est possible en général. H. Weber, dans la première édition de son algèbre (II, 177), estime qu'il faudra probablement donner une réponse négative à cette question. Depuis, un travail de Wimann[1] a précisé le problème, mais nous ne saurions entrer ici dans le détail de ces travaux d'un caractère trop technique.

Comme on le voit, la solution du problème de la résolution des équations, donnée par M. Klein, a un caractère général et philosophique ; une méthode générale en découle. Si l'on veut s'attaquer à la résolution d'une équation d'ordre supérieur, il faut d'abord chercher le groupe de substitutions linéaires avec un nombre minimum de variables — dans la mesure où cela est possible — qui soit isomorphe avec le groupe de Galois de l'équation ; il faut, ensuite, calculer les invariants du

1. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 2e édition, II, 237 et Wimann, *Göttinger Nachrichten*, 1897.

groupe et exprimer les racines en fonction de ces invariants; les difficultés que le calculateur va rencontrer pour réaliser ce programme seront sérieuses, mais ce ne seront plus que des difficultés de calcul proprement dit; nous savons sur quelles notions fondamentales repose la théorie de la résolution des équations algébriques, nous savons qu'elle se rattache à la théorie des groupes de substitutions linéaires et des invariants de ces groupes. Et ce résultat au point de vue de l'enchaînement philosophique des idées est considérable.

Dans les pages qui précèdent nous avons rempli le programme que nous nous étions imposé, et qui consistait à exposer, dans leur enchaînement, les principes sur lesquels est fondée la théorie moderne des équations, et à montrer qu'elle était l'aboutissant d'une longue évolution.

Il n'est peut-être pas inutile, à titre d'application de la théorie de Klein, d'indiqūer à grands traits sa méthode de résolution de l'équation du cinquième degré, tout en faisant cependant remarquer que la théorie de l'équation du cinquième degré n'a plus aujourd'hui qu'un intérêt historique; son exposition nous donnera l'occasion de rappeler des notions intéressantes. D'une manière générale la méthode consiste en ceci : « on réduit l'équation du cinquième degré au problème de l'icosaèdre, ce qui constitue un cas particulier du problème général des formes, le nombre minimum des variables

étant alors deux[1]. » Les groupes de substitutions linéaires auxquels nous allons avoir ici affaire sont les groupes binaires. Nous allons tout d'abord donner à leur sujet quelques indications.

Sous forme homogène ces substitutions sont

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2.$$

En posant

$$\frac{x'_1}{x'_2} = x' \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2} = x,$$

on ramène, comme on sait, le système précédent aux substitutions fractionnaires :

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{1}$$

On peut déterminer tous les groupes finis de ces substitutions automorphes ; pour arriver à cette détermination, on introduit la notion de *pôles*. Les pôles sont les points qui se transforment en eux-mêmes par les substitutions d'un groupe, ou si l'on veut, qui sont égaux à leurs transformés. Si dans le groupe considéré il y a ν opérations, y compris l'opération unité, qui changent le pôle en lui-même, le pôle est dit d'ordre ν. On trouve finalement, en s'appuyant sur le nombre des pôles, qu'il n'y a pas d'autres groupes finis de substitutions automorphes que le groupe cyclique, le groupe du dièdre, le groupe du tétraèdre, le groupe de l'octaèdre, le groupe de l'icosaèdre. La

1. Klein, *Conférences*, p. 72.

formation effective des substitutions et des invariants de ces groupes est exposée par Klein dans les *Vorlesungen*[1]; nous y renvoyons le lecteur. Rappelons que l'on montre que les différents groupes de substitutions automorphes sont isomorphes avec les groupes de rotations par lesquels chacun des corps réguliers inscriptibles dans la sphère s'applique exactement sur lui-même. Les corps réguliers sont, comme on le sait, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre[2]; il faut leur ajouter la double-pyramide (groupe du dièdre). Mais ce que nous voulons retenir au point de vue de la théorie des équations algébriques, c'est la relation qui existe entre les groupes des polyèdres que nous venons d'énumérer et les groupes des permutations des racines des équations. En particulier, la méthode de Klein pour la résolution de l'équation du cinquième degré est basée principalement sur cette constatation que le groupe de Galois appartenant à l'équation du cinquième degré (après adjonction de la racine carrée du discriminant) est isomorphe au groupe des 60 substitutions linéaires de l'icosaèdre ;

1. Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 36 et suiv.

2. Le cube et l'octaèdre d'une part, le dodécaèdre et l'icosaèdre d'autre part ne donnent en tout que deux groupes : le groupe de l'octaèdre et le groupe de l'icosaèdre ; cela tient à des propriétés géométriques élémentaires : le cube et l'octaèdre de même que le dodécaèdre et l'icosaèdre étant liés de certaine façon.

c'est pour cette raison que la réduction de l'équation du cinquième degré à l'équation de l'icosaèdre est possible. Nous allons essayer de caractériser la marche générale que l'on suit dans cette réduction.

Conformément aux principes que nous avons exposés précédemment, on devra déterminer d'abord les invariants du groupe. Or, la considération des pôles va encore nous servir. Si n est le degré du groupe et ν l'ordre du pôle, on a

$$n = \nu\mu,$$

on montre qu'il existe un système de μ pôles *d'ordre* ν : soient

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_\mu$$

ces pôles ; si l'on considère la fonction qui a ces pôles pour racines

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_\mu) \tag{2}$$

et si l'on fait subir à cette fonction, après l'avoir multipliée par $(\gamma x' + \delta)^\mu$, l'une des substitutions $x = \dfrac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$, elle ne sera modifiée qu'à un facteur constant près : nous pourrons obtenir un invariant homogène. On trouve autant de telles formes invariantes qu'il y a de systèmes de pôles d'*ordre déterminé*. On sait qu'il y a trois systèmes de ce genre pour l'icosaèdre qui correspondent à des pôles d'ordre 5, 3, 2. Ces systèmes donneront chacun une forme invariante. Nous n'entrerons pas dans le

détail du calcul qui permet d'obtenir ces formes : rappelons seulement que le premier système donne une forme que l'on représente par f et qui est du douzième degré $(5 \times 12 = 60)$[1], le deuxième système fournit une forme que l'on représente par H et qui est du vingtième degré $(3 \times 20 = 60)$; le troisième système enfin fournit une forme T du trentième degré $(2 \times 30 = 60)$. Entre les formes f, H, T, on démontre[2] qu'il existe une relation

$$T^2 + H^3 = 1728\,f^5$$

qui est du soixantième degré. Cette relation peut s'écrire encore

$$\frac{T^2}{f^5} + \frac{H^3}{f^5} = 1728.$$

Or $\frac{T^2}{f^5}$ et $\frac{H^3}{f^5}$ sont invariants par rapport aux substitutions du groupe. En considérant $\frac{H^3}{f^5}$ comme fonction de $x = \frac{x_1}{x_2}$, et en l'égalant à une quantité connue z, on a

$$\frac{H^3(x)}{f^5(x)} = z,$$

et par suite :

$$T^2 - (1728 - z)\,f^5 = o \qquad (3)$$

équation du soixantième degré en x, appelée équation de l'icosaèdre. Or, c'est cette équation que

1. Pour le groupe de l'icosaèdre $n = 60$.

2. Klein, *loc. cit.*, p. 57.

M. F. Klein considère comme la résolvante de l'équation du cinquième degré ramenée à la forme normale. Indiquons d'abord, sommairement, comment les racines de l'équation normale du cinquième degré se rattachent à l'une des racines de l'équation de l'icosaèdre.

Soit

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = o \tag{4}$$

l'équation du cinquième degré mise sous la forme normale. Soient y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ses racines ; il s'agit d'exprimer une de ces racines, soit y_ν au moyen d'une racine x de l'équation de l'icosaèdre supposée connue. Pour cela Klein introduit les fonctions[1] :

$$u_\nu = \frac{12f^2t_\nu}{\mathrm{T}} \qquad \text{et} \qquad v_\nu = \frac{12f.\ \mathrm{W}_\nu}{\mathrm{H}}$$

f, T, H étant les formes du groupe de l'icosaèdre que nous avons déjà rencontrées ; t et W étant des formes analogues de degrés 6 et 8 du groupe du tétraèdre, diviseur du groupe de l'icosaèdre. Mettons l'une des racines y_ν de l'équation (4) sous la forme[2]

$$y_\nu = mv_\nu(x) + nu_\nu(x).v_\nu(x).$$

Il ne s'agira donc plus que de calculer m, n et z en fonctions rationnelles des quantités connues, c'est-à-dire des coefficients α, β, γ et du discriminant de l'équation du cinquième degré. Alors la

1. Klein, *loc. cit.*, p. 189.

2. Sur ce point, voir Klein, *loc. cit.*, p. 105 et 189.

racine y_v sera bien exprimée au moyen de la racine x de l'équation de l'icosaèdre. Donnons encore d'après M. Klein[1] quelques-uns des caractères de cette équation. Soit x l'une des 60 racines de l'équation de l'icosaèdre, toutes les racines peuvent être exprimées en fonction linéaire de l'une d'entre elles; les 60 quantités forment un groupe de substitutions linéaires; on peut assigner à chacune des 60 racines une région déterminée de la sphère, ces 60 racines sont donc bien séparées; si l'on rend homogènes les 60 expressions des racines, les expressions que l'on obtient satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre. On peut exprimer chaque solution par une série de puissances. — Enfin le calcul des racines peut être abrégé par l'emploi des fonctions elliptiques. A ce dernier point de vue M. F. Klein remarque « que les fonctions elliptiques entrent dans la solution de l'équation du cinquième degré, comme l'on pourrait dire que les logarithmes entrent dans la solution d'une équation par radicaux, parce que ces derniers peuvent être évalués à l'aide de logarithmes[2]. » Ainsi M. Klein, comme Kronecker, distingue nettement deux parties dans le travail de la résolution de l'équation, la partie algébrique et le calcul effectif des racines qui seul fait appel aux

1. Klein, *Conférences sur les mathématiques*, trad. Laugel, p. 70.

2. Klein, *Conférences sur les mathématiques*, p. 67.

éléments transcendants. Mais cette distinction qui était nécessaire pour la clarté des idées et pour bien séparer dans la méthode les deux moments différents n'exprime pas le fond des choses ; entre les transformations algébriques et le calcul effectif des racines il doit y avoir une certaine solidarité, et un esprit aussi philosophique que M. Klein ne pouvait s'arrêter définitivement au point de vue de la séparation. « Il y a une manière plus profonde, dit-il, dans les *Vorlesungen* de concevoir les solutions transcendantes [1]. » Si au lieu de considérer les groupes finis comme nous l'avons fait au cours de ce travail, nous avions examiné des groupes avec une infinité de substitutions et si nous avions étendu le problème des formes (Formenproblem) à ces derniers groupes, nous aurions vu les transcendantes jouer un rôle fondamental ; mais nous aurions été entraîné en dehors du domaine spécial de l'algèbre. De telles considérations, remarque en effet M. Klein, « nous conduiraient à formuler un problème général qui envelopperait à la fois la théorie des équations algébriques d'ordre supérieur et le principe de formation de la fonction théta [2] ». Nous sommes donc arrivé au terme de notre étude

1. Klein, *Vorlesungen*, p. 135.

2. Klein, *ibid.*, p. 136 : « Es führen so unsere Ueberlegungen zu einem umfassenden Probleme, welches ebensowohl die Theorie der Gleichungen höheren Grades als das Bildungsgesetz der Θ — Function in sich begreifen wird. »

TABLE DES MATIÈRES

ÉVREUX, IMPRIMERIE CH. HÉRISSEY, PAUL HÉRISSEY, SUCC^r